

В.И.ГОСТЕВ

**СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ
С ЦИФРОВЫМИ
РЕГУЛЯТОРАМИ**

СПРАВОЧНИК

Киев
«Техника»
1990

ББК 32.965я2
Г72
УДК 621.382.3

Рецензент д-р техн. наук *В. К. Стеклов*
Редакция литературы по энергетике, электронике, кибер-
нетике и связи
Зав. редакцией *Э. В. Божко*

Гостев В. И.

Г72 Системы управления с цифровыми регуляторами:
Справочник. — К.: Техника, 1990. — 280 с.
ISBN 5-335-00369-3

Приведены сведения по цифровым регуляторам, обеспечивающим оптимальные по быстродействию переходные процессы в системах управления, таблицы передаточных функций регуляторов, формулы расчета переходных процессов, структурные схемы систем управления с регуляторами, обеспечивающими высокое качество систем при произвольных возмущениях, схемы дискретных регуляторов (для отработки ступенчатых и произвольных воздействий, для систем с насыщением, для систем с изменяющимися параметрами) на цифровых и аналоговых интегральных микросхемах и микропроцессорах, схемы усилительно-преобразующих устройств прямого цифрового управления исполнительными двигателями.

Расчитан на инженерно-технических работников, занимающихся проектированием и эксплуатацией систем автоматического управления, а также может быть полезен студентам вузов.

Г $\frac{2202070500-030}{M202 (04)-90}$ 43.90

ББК 32.965я2

ISBN 5-335-00369-3

© Гостев В. И.,
1990

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для создания быстродействующих, высокоточных и надежных систем автоматического управления широко применяют микропроцессоры (МП), микро-ЭВМ, элементы и устройства цифровой техники. Поскольку, как правило, объекты регулирования описываются непрерывными математическими моделями, то в системах управления четко выделяют цифровую (дискретную) и непрерывную части. Цифровая (дискретная) часть представляет собой регулятор (дискретное корректирующее устройство), который и придает всей системе управления желаемые динамические свойства. В настоящее время теория и техника систем автоматического управления с цифровыми регуляторами находится в стадии интенсивного развития [13; 14; 31; 33; 37—42].

В справочнике изложено проектирование систем управления с цифровыми регуляторами на основе табулированных передаточных функций оптимальных по быстродействию (обеспечивающих переходные процессы за минимальное число шагов квантования) регуляторов. Составленные таблицы дают возможность для заданного типового (ступенчатого, линейного или линейно-квадратичного) воздействия на входе системы и передаточной функции линейного объекта регулирования любого порядка определить оптимальную передаточную функцию цифрового регулятора и оптимальное управляющее воздействие на входе объекта регулирования.

Кроме обеспечения быстродействия при скачкообразных возмущениях на входе система управления должна обеспечивать требуемое качество управления (определяемое величиной ошибки рассогласования) при произвольных входных воздействиях. При этом возможны два варианта построения структурных схем систем управления. Первый вариант построения заключается в том, что системе выполняют с переменной структурой: одна структура обеспечивает обработку скачкообразных возмущений, другая — работу системы при произвольных входных воздействиях. Второй вариант предполагает построение таких структурных схем систем управления, в которых цифровые регуляторы обеспечивают оптимальные на каждом интервале регулирования переходные процессы и требуемое качество управления при произвольных входных воздействиях. В работе основное внимание уделяется второму варианту построения структурных схем систем управления.

Тракты, содержащие ключ, цифровой регулятор, фиксатор нулевого порядка или в более общем случае тракты, содержащие аналого-цифровой преобразователь, цифровой регулятор, цифро-аналоговый преобразователь, рассматриваются как дискретные корректирующие устройства (дискретные регуляторы). Представлены различные схемы технических реализаций дискретных регуляторов для систем управления с различными математическими моделями объектов регулирования.

В справочнике приведены формулы для идентификации параметров объектов регулирования, расчета коэффициентов настройки цифрового регулятора по идентифицированным параметрам объекта и схемные реализации самонастраивающихся регуляторов. Особое внимание при построении высокоточных систем управления с цифровыми регуляторами уделено учету нелинейностей, методам и средствам повышения качества при различных режимах работы систем управления. Для систем управления с двухфазными асинхронными двигателями приведены схемы усилительно-преобразующих устройств с прямым цифровым входом.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252601 Киев, 1, ул. Крещатик, 5. Издательство «Техника».

Глава 1

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ВЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

1.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБЪЕКТАМИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ВХОДНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим систему (рис. 1.1, а), которая содержит мгновенный ключ с шагом квантования h , цифровой регулятор с передаточной функцией $W(z)$, фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией $H(s)$ и объект регулирования (непрерывную часть) с передаточной функцией $G(s)$. Цифровой регулятор позволяет при входном воздействии типа ступенчатой функции и нулевых начальных условиях выполнить оптимальный переходной процесс без перерегулирования за конечное и минимальное время. Для получения такого оптимального процесса необходимо определить требуемую передаточную функцию цифрового регулятора $W(z)$. Наиболее просто функцию $W(z)$ определить методом переменного коэффициента усиления [37]. Метод заключается в том, что цифровой регулятор рассматривается как усилитель с переменным коэффициентом усиления K_v , принимающим различные значения на разных интервалах прерывания мгновенного ключа. В структурной схеме такой усилитель располагается после фиксатора (рис. 1.1, б), причем в любой момент времени $t = vh^+$ вход u_2 и выход u_2' этого усилителя связаны линейным соотношением $u_2'(vh^+) = K_v u_2(vh^+)$, где K_v — постоянный коэффициент усиления усилителя в $(v+1)$ -м шаге квантования мгновенного ключа. Матрицу перехода Φ системы можно представить в виде функции коэффициентов K_v в последовательных интервалах прерывания мгновенного ключа. Используя известные соотношения

$$\left. \begin{aligned} v(vh^+) &= Bv(vh); \\ v(v+1h) &= \Phi(h)v(vh^+); \\ v(v+1h) &= \Phi(h)Bv(vh), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

находим вектор состояния $v(vh^+)$ как функцию коэффициентов усиления $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{v-1}$. Зная значения вектора состояния $v(vh^+)$ в последовательные дискретные моменты времени $v = 0, 1, 2, \dots$, получаем последовательность входных $u_2(vh^+)$ и выходных $u_2'(vh^+)$ сигналов цифрового регулятора.

Передаточная функция $W(z)$ цифрового регулятора

$$W(z) = \frac{\sum_{v=0}^l K_v u_2(vh^+) z^{-v}}{\sum_{v=0}^l u_2(vh^+) z^{-v}} = \frac{\sum_{v=0}^l u'_2(vh^+) z^{-v}}{\sum_{v=0}^l u_2(vh^+) z^{-v}} \quad (1.2)$$

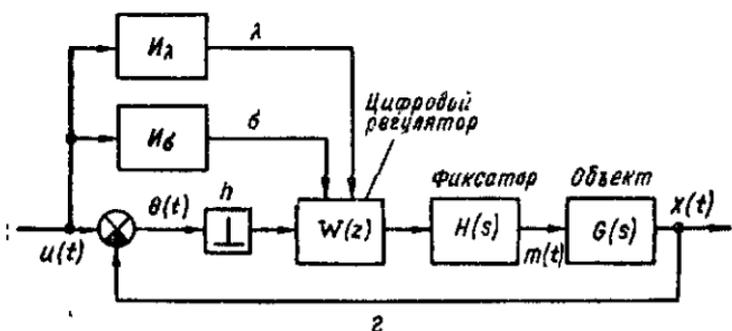
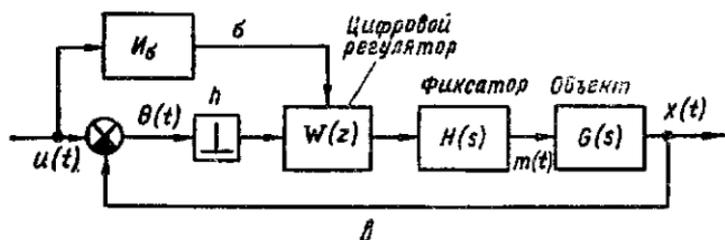
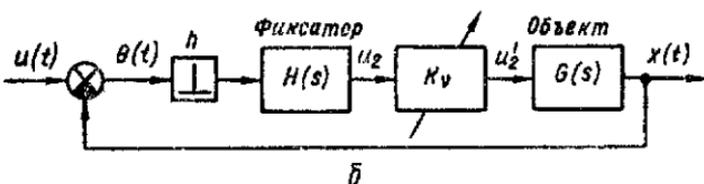
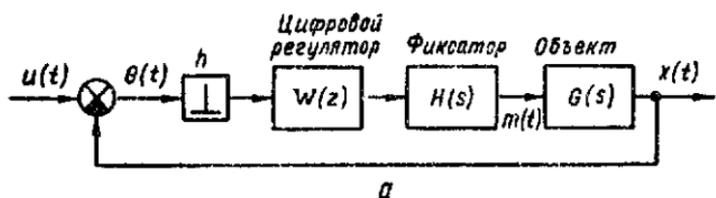


Рис. 1.1

Для получения максимального быстродействия при входном воздействии типа ступенчатой функции и нулевых начальных условиях необходимо, чтобы при $t > Nh$, где N — порядок дифференциального уравнения объекта регулирования; h — шаг квантования мгновенного ключа, ошибка системы равнялась нулю, и входные сигналы интеграторов схемы системы в перемен-

ных состояния также были равны нулю. Используя метод переменного коэффициента усиления, можно для различных передаточных функций $G(s)$ линейных объектов регулирования получить аналитические выражения для коэффициентов передаточной функции $W(z)$ цифрового регулятора (рис. 1.1, а) [19; 23]. Передаточные функции $W(z)$ цифровых регуляторов, обеспечивающих при входном воздействии типа ступенчатой функции

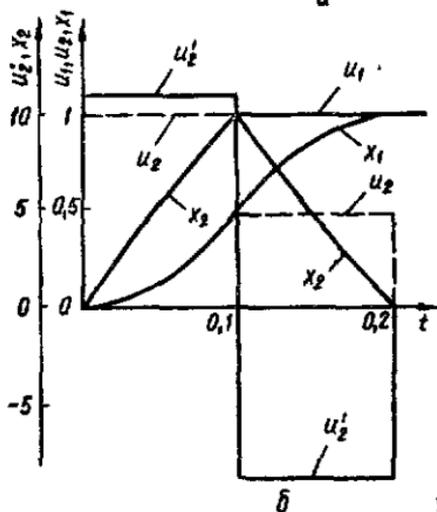
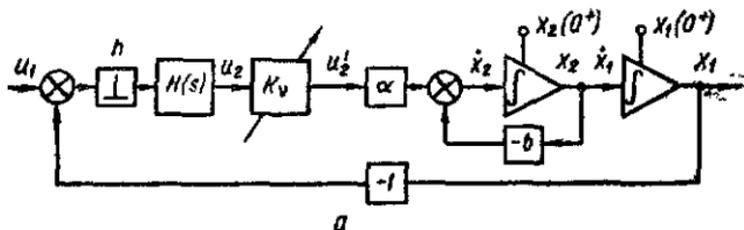


Рис. 1.2

и нулевых начальных условиях оптимальный переходной процесс, различные в зависимости от того, имеет объект регулирования интегрирующие звенья или нет.

Определим передаточную функцию $W(z)$ оптимального цифрового регулятора для системы, имеющей объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-2}$. Объект регулирования имеет астатизм 1-го порядка. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.2, а. Дифференциальные уравнения состояния (без учета переменного коэффициента усиления K_v) имеют вид $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = -bx_2 - \alpha u_2$; $\dot{u}_2 = 0$; уравнения переходных состояний: $u_1(vh^+) = u_1(vh)$; $x_1(vh^+) = x_1(vh)$; $x_2(vh^+) = x_2(vh)$; $u_2(vh^+) = u_1(vh) - x_1(vh)$. Перепишав уравнения в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$ и $v(vh^+) = Bv(vh)$, находим

$$A = \begin{bmatrix} 00 & 00 \\ 00 & 10 \\ 00 & -b\alpha \\ 00 & 00 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 000 \\ 0 & 100 \\ 0 & 010 \\ 1 & -100 \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}; v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом усилителя с переменным коэффициентом усиления определим дискретную матрицу перехода по матрице A в виде:

$$\Phi(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Q \alpha P K_v \\ 0 & 0 & B \alpha Q K_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$B = e^{-bh}; \quad Q = \frac{1}{b} (1 - B); \quad P = \frac{1}{b^2} (bh - 1 + B). \quad (1.3)$$

Далее на основании соотношения (1.1) последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= (Bv(0))^T = [1; 0; 0; 1]; \\ v^T(h) &= (\Phi(h, K_0) v(0^+))^T = [1; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1]; \\ v^T(h^+) &= (Bv(h))^T = [1; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1 - \alpha P K_0]; \\ v(2h) &= \Phi(h, K_1) v(h^+) = \begin{bmatrix} \alpha P K_0 + \alpha Q^2 K_0 + (1 - \alpha P K_0) \alpha P K_1 \\ \alpha Q B K_0 + \alpha Q (1 - \alpha P K_0) K_1 \\ 1 - \alpha P K_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что в конечное состояние равновесия систему можно перевести за два периода прерывания мгновенного ключа. Для этого необходимо совместное выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} x_1(2h) &\cong \alpha(P + Q^2) K_0 + \alpha P (1 - \alpha P K_0) K_1 = 1; \\ x_2(2h) &= \alpha Q B K_0 + \alpha Q (1 - \alpha P K_0) K_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Из условий (1.4), используя выражения (1.3), записываем

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{\alpha[P + Q^2 - BP]} = \frac{b}{\alpha h(1 - B)}; \\ K_1 &= -\frac{BK_0}{1 - \alpha P K_0} = -\frac{b^2 B}{\alpha[1 - B(1 + bh)]}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Определим передаточную функцию цифрового регулятора на основании выражения (1.2)

$$W(z) = \frac{K_0 u_2(0^+) + K_1 u_2(h^+) z^{-1}}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1}} = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad (1.6)$$

$$\text{где } u_2(0^+) = 1; \quad a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha P K_0 = \frac{1 - B(1 + bh)}{bh(1 - B)};$$

$$b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) = -B; \quad B = e^{-bh}.$$

Из выражений (1.5) и (1.6) видно, что коэффициенты передаточной функции цифрового регулятора можно определить непосредственно через параметры передаточной функции объекта регулирования и шаг квантования h .

Оптимальный цифровой регулятор (при единичном ступенчатом воздействии на входе системы) формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2'(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2'(h^+) = K_1 u_2(h^+) = -BK_0$. Переход-

ные процессы в интервале $0^+ < t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [1; \alpha P(\tau) K_0; \alpha Q(\tau) K_0; 1], \quad (1.7)$$

где

$$P(\tau) = \frac{1}{b^2} [b\tau - 1 + B(\tau)]; \quad Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]; \quad B(\tau) = e^{-b\tau}.$$

Переходные процессы в интервале $h^+ < t < 2h$, $0^+ < \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha K_0 [P + QQ(\tau) - BP(\tau)] \\ \alpha K_0 [QB(\tau) - BQ(\tau)] \\ 1 - \alpha PK_0 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Пусть объект регулирования имеет следующие параметры: $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $h = 0,1 \text{ с}$. Определим передаточную функцию цифрового регулятора, обеспечивающего оптимальный переходный процесс в системе, т. е. оптимальную реакцию на выходе системы, при подаче на вход ступенчатой функции по формулам (1.5) — (1.6)

$$W(z) = 11,0333 \frac{1 - 0,8187z^{-1}}{1 + 0,4833z^{-1}}.$$

Переходные процессы в системе, рассчитанные по формулам (1.7) и (1.8), изображены на рис. 1.2, б.

Наиболее просто по изложенной методике определить передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора для системы (см. рис. 1.1, а), имеющей объект регулирования второго порядка с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^2$ [22]. Схема аналогового моделирования для такого объекта показана на рис. 1.3, а. Оптимальную передаточную функцию цифрового регулятора можно вычислить по формуле (1.6), в которой $K_0 = 1/(\alpha h^2)$; $K_1 = -2K_0 = -2/(\alpha h^2)$; $u_2(0^+) = 1$; $b_1 = K_1 u_2(h^+)/K_0 = -1$; $a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha h^2 K_0/2 = \frac{1}{2}$, т. е.

$$W(z) = \frac{1}{\alpha h^2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}}.$$

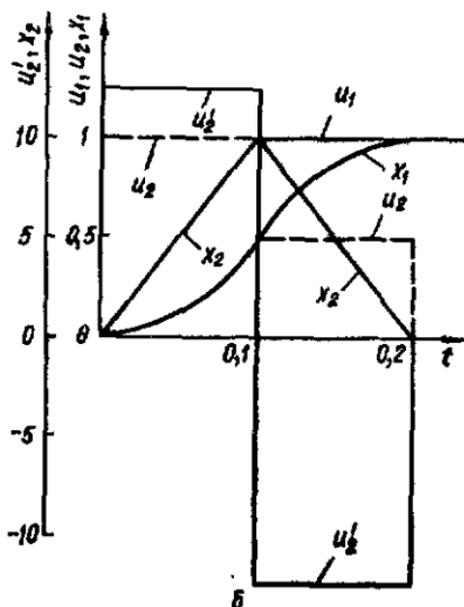
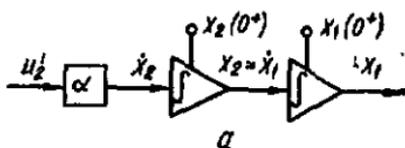


Рис. 1.3

с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^2$ [22]. Схема аналогового моделирования для такого объекта показана на рис. 1.3, а. Оптимальную передаточную функцию цифрового регулятора можно вычислить по формуле (1.6), в которой $K_0 = 1/(\alpha h^2)$; $K_1 = -2K_0 = -2/(\alpha h^2)$; $u_2(0^+) = 1$; $b_1 = K_1 u_2(h^+)/K_0 = -1$; $a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha h^2 K_0/2 = \frac{1}{2}$, т. е.

Оптимальный цифровой регулятор формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования:

$$m_0 = u_2'(0^+) = K_0 = 1/(\alpha h^2); \quad m_1 = u_2'(h^+) = K_1 u_2(h^+) = -1/(\alpha h^2).$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [u_1; x_1; x_2; u_2] = [1; \tau^2/(2h^2); \tau/h^2; 1].$$

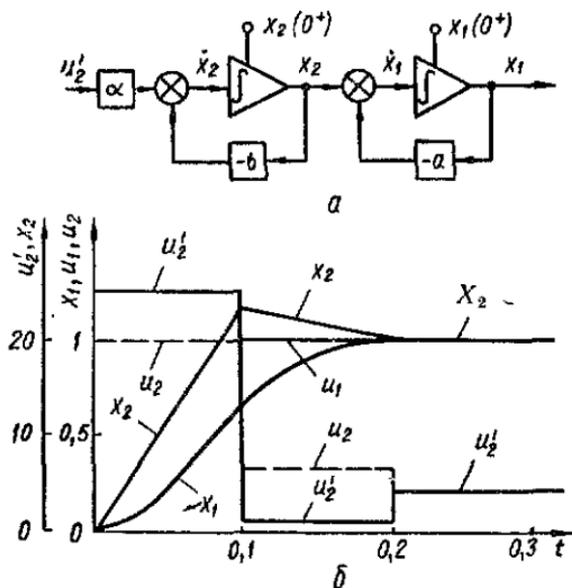


Рис. 1.4

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [1; 1/2 + \tau/h - \tau^2/(2h^2); 1/h - \tau/h^2; 1/2].$$

Переходные процессы в системе (рис. 1.1, а) при $\alpha = 8 \text{ с}^{-2}$ и $h = 0,1 \text{ с}$ изображены на рис. 1.3, б.

Передаточную функцию цифрового регулятора $W(z)$ для объекта, имеющего передаточную функцию $G(s)$ без интегратора, определить сложнее. В этом случае цифровой регулятор должен выполнить интегрирование, и его передаточная функция усложняется.

Рассмотрим систему (см. рис. 1.1, а), в которой математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [(s + a)(s + b)]^{-1}$. Объект регулирования имеет астатизм нулевого порядка. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.4, а. Запишем дифференциальные уравнения состояния для системы на рис. 1.1, б с этим объектом регулирования (без учета переменного коэффициента усиления K_v): $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{x}_1 = x_2 - ax_1$; $\dot{x}_2 = \alpha u_2 - bx_2$; $\dot{u}_2 = 0$. Уравнения переходных состояний имеют вид

$u_1(vh^+) = u_1(vh)$; $x_1(vh^+) = x_1(vh)$; $x_2(vh^+) = x_2(vh)$; $u_2(vh^+) = u_1(vh) - x_1(vh)$. Перепишем уравнения в векторно-матричной форме $v = Av$ и $v(vh^+) = Bv(vh)$, находим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}; v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом усилителя с переменным коэффициентом усиления определим дискретную матрицу перехода по матрице A в виде

$$\Phi(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & W & \alpha PK_v \\ 0 & 0 & B & \alpha QK_v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= e^{-ah}; B = e^{-bh}; W = \frac{1}{b-a}(A-B); \\ P &= \frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(bA-aB) \right]; Q = \frac{1}{b}(1-B). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Далее на основании соотношения (1.1) последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= (Bv(0))^T = [1; 0; 0; 1]; \\ v^T(h) &= (\Phi(h, K_0)v(0^+))^T = [1; \alpha PK_0; \alpha QK_0; 1]; \\ v^T(h^+) &= (Bv(h))^T = [1; \alpha PK_0; \alpha QK_0; 1 - \alpha PK_0]; \\ v(2h) &= \Phi(h, K_1)v(h^+) = \begin{bmatrix} \alpha PK_0 A + \alpha QK_0 W + \alpha P(1 - \alpha PK_0)K_1 \\ \alpha QK_0 B + \alpha Q(1 - \alpha PK_0)K_1 \\ 1 - \alpha PK_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что в конечном состоянии равновесия систему можно перевести за два периода прерывания мгновенного ключа. Для этого необходимо совместное выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} x_1(2h) &= \alpha PK_0 A + \alpha QK_0 W + \alpha P(1 - \alpha PK_0)K_1 = 1; \\ x_2(2h) &= \alpha QK_0 B + \alpha Q(1 - \alpha PK_0)K_1 = a. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Из условий (1.10), используя выражения (1.9), записываем

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{Q - aP}{\alpha Q(AP + QW - BP)} = \frac{ab}{\alpha(1-A)(1-B)}; \\ K_1 &= \frac{a - \alpha QBK_0}{\alpha Q(1 - \alpha PK_0)} = \frac{ab(a-b)(1-A-B)}{\alpha[(a-b)AB - aA + bB]}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При совместном выполнении указанных условий имеем

$$v^T(vh) = v^T(vh^+) = [1; 1; a; 0]; u_2^+(vh^+) = \frac{ab}{\alpha} \text{ при } v = 2, 3, 4, \dots$$

Таким образом, передаточную функцию цифрового регулятора можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{K_0 u_2(0^+) + K_1 u_2(h^+) z^{-1} + \frac{ab}{\alpha} (z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots)}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1}} = \\ &= \frac{K_0 u_2(0^+) + [K_1 u_2(h^+) - K_0 u_2(0^+)] z^{-1} + \left[\frac{ab}{\alpha} - K_1 u_2(h^+) \right] z^{-2}}{(1 - z^{-1}) [u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1}]} = \\ &= K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $u_2(0^+) = 1$; $a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha P K_0 = \frac{(a-b)AB - aA + bB}{(a-b)(1-A)(1-B)}$;

$b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) - u_2(0^+) = -(A+B)$; $b_2 = \frac{1}{K_0} \left[\frac{ab}{\alpha} - K_1 u_2(h^+) \right] = AB$.

Из выражений (1.11) — (1.12) видно, что коэффициенты передаточной функции цифрового регулятора можно определить непосредственно через параметры передаточной функции объекта регулирования и шаг квантования h .

Оптимальный цифровой регулятор при единичном ступенчатом воздействии на входе системы формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2'(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2'(h^+) = K_1 u_2(h^+) = (1 - A - B) K_0$; $m_v = u_2'(vh^+) = \frac{ab}{\alpha}$ при $v \geq 2$. Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t \leq h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [1; \alpha P(\tau) K_0; \alpha Q(\tau) K_0; 1], \quad (1.13)$$

где $P(\tau) = \frac{1}{ab} \left\{ 1 + \frac{1}{a-b} [bA(\tau) - aB(\tau)] \right\}$; $Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]$;

$$A(\tau) = e^{-a\tau}; B(\tau) = e^{-b\tau}.$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t \leq 2h$, $0^+ \leq \tau \leq h$, $t = \tau + h$ определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha P K_0 A(\tau) + \alpha Q K_0 W(\tau) + \left(\frac{a}{Q} - \alpha B K_0 \right) P(\tau) \\ \alpha Q K_0 B(\tau) + \left(\frac{a}{Q} - \alpha B K_0 \right) Q(\tau) \\ 1 - \alpha P K_0 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где $W(\tau) = \frac{1}{a-b} [B(\tau) - A(\tau)]$.

Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $a = 20 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.11) — (1.12)

$$W(z) = 25,5204 \frac{1 - 0,95407z^{-1} + 0,11080z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,32794z^{-1})}.$$

Оптимальные для ступенчатого воздействия переходные процессы в системе (см. рис. 1.1, а) с указанным объектом регулирования, рассчитанные по формулам (1.13), (1.14), изображены на рис. 1.4, б.

Рассмотрим систему (см. рис. 1.1, а), в которой математическая модель субъекта регулирования описывается колебательным звеном с передаточной функцией $G(s) = \alpha(s^2 + bs + a)^{-1}$ при условии, что $4a - b^2 > 0$. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.5, а. Запишем дифференциальные уравнения

состояния для системы на рис. 1.1, б с таким объектом регулирования (без учета переменного коэффициента K_v): $u_1 = 0$; $x_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = -bx_2 - ax_1 + \alpha u_2$; $u_2 = 0$. Уравнения переходных состояний такие же, как и для предыдущей системы. Перепишем дифференциальные уравнения в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}\mathbf{v} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & -b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

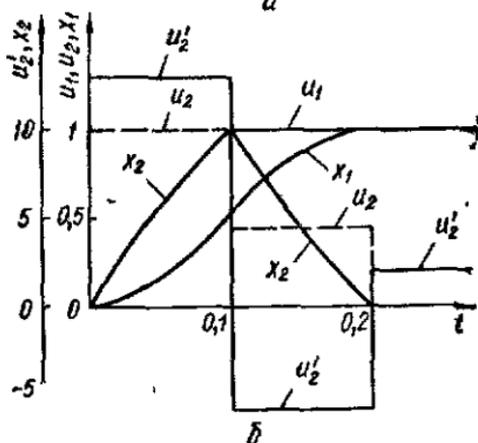
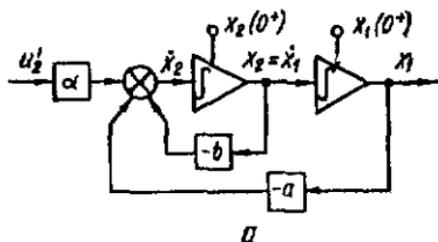


Рис. 1.5

С учетом усилителя с переменным коэффициентом усиления определим дискретную матрицу перехода

$$\Phi(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & M & \alpha RK_v \\ 0 & -aM & D & \alpha MK_v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{cases} L = \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right); & M = \frac{1}{\lambda} \sqrt{B} \sin \lambda h; \\ R = \frac{1}{a} \left[1 - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right) \right]; \\ D = \sqrt{B} \left(\cos \lambda h - \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right); & \lambda = \sqrt{a - b^2/4}; \quad B = e^{-bh}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Далее на основании соотношения (1.1) последовательно вычисляем

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^T(0^+) &= (B\mathbf{v}(0))^T = [1; 0; 0; 1]; \\
\mathbf{v}^T(h) &= (\Phi(h, K_0)\mathbf{v}(0^+))^T = [1; \alpha RK_0; \alpha MK_0; 1]; \\
\mathbf{v}^T(h^+) &= (B\mathbf{v}(h))^T = [1; \alpha RK_0; \alpha MK_0; 1 - \alpha RK_0]; \\
\mathbf{v}(2h) &= \Phi(h, K_1)\mathbf{v}(h^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0(RL + M^2) + \alpha R(1 - \alpha RK_0)K_1 \\ \alpha MK_0(D - aR) + \alpha M(1 - \alpha RK_0)K_1 \\ 1 - \alpha RK_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

В конечное состояние равновесия систему можно перевести за два периода прерывания мгновенного ключа, если выполнить следующие условия:

$$\begin{cases} x_1(2h) = \alpha K_0(RL + M^2) + \alpha R(1 - \alpha RK_0)K_1 = 1; \\ x_2(2h) = \alpha MK_0(D - aR) + \alpha M(1 - \alpha RK_0)K_1 = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Из условий (1.16), используя выражения (1.15), записываем

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{\alpha(RL + M^2 + aR^2 - DR)} = \frac{a}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}; \\ K_1 &= \frac{(aR - D)K_0}{1 - \alpha RK_0} = \frac{a(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h)}{\alpha\sqrt{B} \left(\frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h - \cos \lambda h + \sqrt{B} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

При совместном выполнении указанных условий имеем

$$\mathbf{v}^T(\nu h) = \mathbf{v}^T(\nu h^+) = [1; 1; 0; 0]; \quad u'_2(\nu h^+) = a/\alpha; \quad \nu = 2, 3, 4, \dots$$

Таким образом, передаточную функцию цифрового регулятора можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{K_0 u_2(0^+) + K_1 u_2(h^+) z^{-1} + \frac{a}{\alpha} (z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots)}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1}} = \\ &= K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\text{где } u_2(0^+) = 1; \quad a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha RK_0 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{B} \left(\frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h - \cos \lambda h \right) + B}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}; \quad b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) - u_2(0^+) = \\ &= aR - D - 1 = 2\sqrt{B} \cos \lambda h; \quad b_2 = \frac{1}{K_0} \left[\frac{a}{\alpha} - K_1 u_2(h^+) \right] = \frac{a}{\alpha K_0} - \\ &\quad - aR + D = B. \end{aligned}$$

Оптимальный цифровой регулятор при единичном ступенчатом воздействии на входе системы формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u'_2(0^+) =$

$$\begin{aligned} &= K_0; \quad m_1 = u'_2(h^+) = K_1 u_2(h^+) = (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h) K_0; \quad m_\nu = \\ &= u(\nu h^+) = a/\alpha \text{ при } \nu \geq 2. \end{aligned}$$

Переходные процессы в интервале

$0^+ \leq t \leq h, t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [1; \alpha R(\tau) K_0; \alpha M(\tau) K_0; 1], \quad (1.19)$$

где $R(\tau) = \frac{1}{a} \left[1 - \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right) \right]$; $M(\tau) = \frac{1}{\lambda} \times$
 $\times \sqrt{B(\tau)} \sin \lambda \tau$; $B(\tau) = e^{-b\tau}$.

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t \leq 2h, 0^+ \leq \tau \leq h, t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha K_0 [RL(\tau) + MM(\tau) + (aR - D)R(\tau)] \\ \alpha K_0 [MD(\tau) - aRM(\tau) + (aR - D)M(\tau)] \\ 1 - \alpha RK_0 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

где

$$L(\tau) = \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right); \quad D(\tau) = \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau - \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right).$$

Пусть объект регулирования (рис. 1.5, а) имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 5 \text{ с}^{-1}$, $a = 20 \text{ с}^{-2}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1$ с по формулам (1.17) — (1.18):

$$W(z) = 12,92050 \frac{1 - 1,45174z^{-1} + 0,60653z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,45823z^{-1})}.$$

Оптимальные для ступенчатого воздействия переходные процессы в системе (см. рис. 1.1, а) с указанным объектом регулирования, рассчитанные по формулам (1.19), (1.20), изображены на рис. 1.5, б.

1.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБЪЕКТАМИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ВОХОДНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим систему (см. рис. 1.1, а), в которой математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)]^{-1}$. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.6, а. Запишем дифференциальные уравнения состояния для системы на рис. 1.1, б с этим объектом регулирования (без учета переменного коэффициента усиления K_v): $u_1 = 0$; $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = x_3 - ax_2$; $\dot{x}_3 = \alpha u_2 - bx_3$; $\dot{u}_2 = 0$. Уравнения переходных состояний: $u_1(vh^+) = u_1(vh)$; $x_1(vh^+) = x_1(vh)$; $x_2(vh^+) = x_2(vh)$; $x_3(vh^+) = x_3(vh)$; $u_2(vh^+) = u_1(vh) - x_1(vh)$. Перепишывая уравнения в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$ и $v(vh^+) = Bv(vh)$, где $v^T = [u_1, x_1, x_2,$

x_2, u_2], с учетом усилителя с переменным коэффициентом усиления определим матрицу перехода по матрице A в виде

$$\Phi(t, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & M & P & \alpha L K_v \\ 0 & 0 & A & W & \alpha P K_v \\ 0 & 0 & 0 & B & \alpha Q K_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$M = \frac{1}{a}(1 - A); L = \frac{1}{a^2 b^2} \left[abh - (a + b) + \frac{b^2 A - a^2 B}{b - a} \right], \quad (1.21)$$

а остальные коэффициенты можно определить по формулам (1.9).

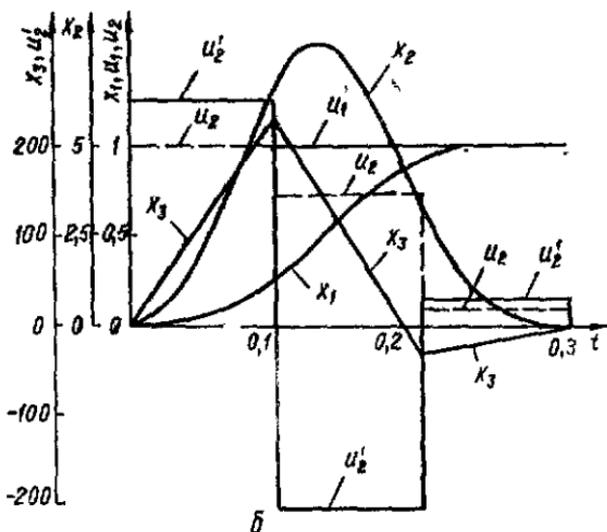
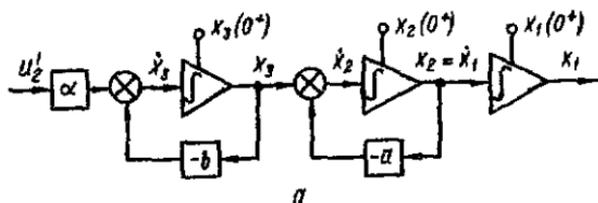


Рис. 16

Далее последовательно вычисляем

$$v^T(0^+) = (Bv(0))^T = [1; 0; 0; 0; 0; 1]; v^T(h) = (\Phi(h, K_0)v(0^+))^T = [1; \alpha L K_0; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1];$$

$$v^T(h^+) = (Bv(h))^T = [1; \alpha L K_0; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1 - \alpha L K_0];$$

$$\begin{aligned} \varphi(2h) &= \Phi(h, K_1) \varphi(h^+) = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha K_0(L + MP + QP) + \alpha L(1 - \alpha LK_0) K_1 \\ \alpha K_0(AP + QW) + \alpha P(1 - \alpha LK_0) K_1 \\ \alpha K_0 BQ + \alpha Q(1 - \alpha LK_0) K_1 \\ 1 - \alpha LK_0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\varphi(3h) = \Phi(h, K_2) \varphi(2h^+) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha K_0(L + MP + QP) + \alpha L(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha K_0(PAM + \\ + QWM) + \alpha PM(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha K_0 BQP + \\ + \alpha QP(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha LFK_2; \\ \alpha K_0(PA^2 + QWA) + \alpha PA(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha K_0 BQW + \\ + \alpha QW(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha PFK_2; \\ \alpha K_0 B^2Q + \alpha QB(1 - \alpha LK_0) K_1 + \alpha QFK_2; \\ F \end{bmatrix},$$

где $F = 1 - [\alpha K_0(L + MP + QP) + \alpha L(1 - \alpha LK_0) K_1]$.

Последнее выражение показывает, что в конечном состоянии равновесия систему можно перевести за три периода прерывания мгновенного ключа. Для этого необходимо совместное выполнение трех условий $x_1(3h) = 1$; $x_2(3h) = 0$, $x_3(3h) = 0$.

Решая составленную на основании этих условий из строк вектора $\varphi(3h)$ систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha LK_0) K_1 &= -(A + B) K_0; \\ K_0 &= \frac{1}{\alpha [L(1 - A)(1 - B) + QP(1 - A) + MP(1 - B) + QWM]}; \\ K_1 &= -\frac{A + B}{1 - \alpha LK_0} K_0; \quad K_2 = \frac{AB}{F} K_0; \\ F &= 1 - \alpha K_0 [L + P(M + Q) - L(A + B)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Передаточная функция цифрового регулятора на основании выражения (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{K_0 u_2(0^+) + K_1 u_2(h^+) z^{-1} + K_2 u_2(2h^+) z^{-2}}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1} + u_2(2h^+) z^{-2}} = \\ &= K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где с учетом выражений (1.9), (1.21) и (1.22) коэффициенты находятся в виде

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{ab}{\alpha h(1 - A)(1 - B)}; \quad b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) = -(A + B); \\ b_2 &= \frac{K_2}{K_0} u_2(2h^+) = AB; \quad a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha LK_0 = \\ &= 1 - \left[1 - \frac{a + b}{abh} + \frac{b^2 A - a^2 B}{abh(b - a)} \right] \frac{1}{(1 - A)(1 - B)}; \\ a_2 &= u_2(2h^+) = F = 1 - \frac{1}{abh} \left[abh + a \left(1 - bh + \frac{b}{a - b} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times A + b \left(1 - ah - \frac{a}{a-b} \right) B - (a+b) AB \left] \frac{1}{(1-A)(1-B)} ; \right.$$

$$A = e^{-ah}; B = e^{-bh}.$$

Из полученных выражений видно, что коэффициенты передаточной функции цифрового регулятора можно определить непосредственно через параметры передаточной функции объекта и шаг квантования h .

Оптимальный цифровой регулятор при единичном ступенчатом воздействии на входе системы формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2 \times X(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2(h^+) = b_1 K_0$; $m_2 = u_2(2h^+) = b_2 K_0$. Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha L(\tau) K_0 \\ \alpha P(\tau) K_0 \\ \alpha Q(\tau) K_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

где

$$L(\tau) = \frac{1}{a^2 b^2} \left[ab\tau - (a+b) + \frac{b^2 A(\tau) - a^2 B(\tau)}{b-a} \right];$$

$$P(\tau) = \frac{1}{ab} \left\{ 1 + \frac{1}{a-b} [bA(\tau) - aB(\tau)] \right\}; Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)];$$

$$A(\tau) = e^{-a\tau}; B(\tau) = e^{-b\tau}.$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + h$ определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 [L + PM(\tau) + QP(\tau) - (A+B)L(\tau)] \\ \alpha K_0 [PA(\tau) + QW(\tau) - (A+B)P(\tau)] \\ \alpha K_0 [QB(\tau) - (A+B)Q(\tau)] \\ 1 - \alpha L K_0 \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

где

$$M(\tau) = \frac{1}{a} [1 - A(\tau)]; W(\tau) = \frac{1}{a-b} [B(\tau) - A(\tau)].$$

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 [L + MP + PQ - (A+B)L] + \alpha K_0 [(WQ - \\ - BP)M(\tau) - AQP(\tau) + ABL(\tau)] \\ \alpha K_0 [(WQ - BP)A(\tau) - AQW(\tau) + ABP(\tau)] \\ \alpha K_0 A [BQ(\tau) - QB(\tau)] \\ F \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-3}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $a = 20 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию опти-

мального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1$ с по формулам (1.23)

$$W(z) = 255,204 \frac{1 - 0,95407z^{-1} + 0,11080z^{-2}}{1 + 0,73850z^{-1} + 0,08832z^{-2}}.$$

Переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях в системе как рис. 1.1, а

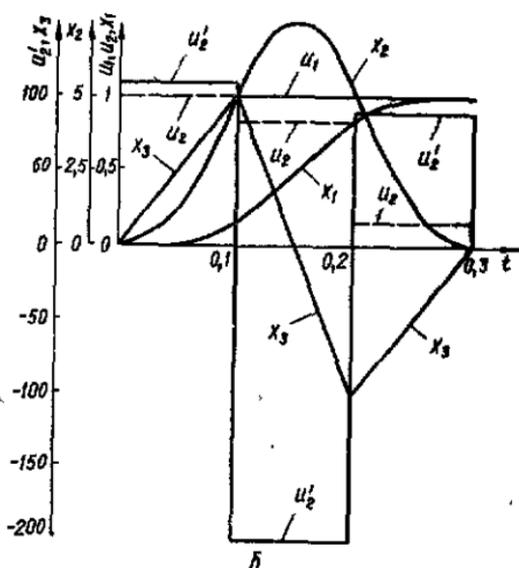
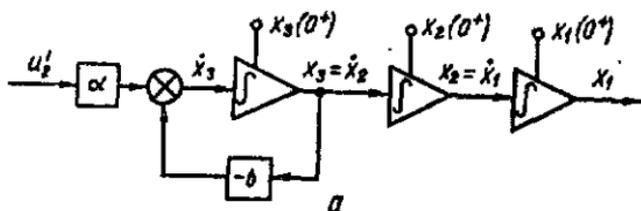


Рис. 1.7

с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, рассчитанные по формулам (1.24) — (1.26), показаны на рис. 1.6, б.

Рассмотрим систему (см. рис. 1.1, а), в которой математическая модель объекта регулирования имеет два интегрирующих звена и описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s^2 (s + b)]^{-1}$. Объект регулирования имеет астатизм 2-го порядка. Схема аналогового моделирования для такого объекта показана на рис. 1.7, а. Запишем дифференциальные уравнения состояния для системы на рис. 1.1, б с этим объектом регулирования (без учета переменного коэффициента усиления K_v): $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = x_3$; $\dot{x}_3 = \alpha u_2 - b x_3$; $\dot{u}_2 = 0$. Уравнения переходных состояний такие же, как и для предыдущей системы. Переписывая уравнения в век-

в матричной форме $\dot{v} = Av$ и $v(vh^+) = Bv(vh)$, по матрице A определяем дискретную матрицу перехода $\Phi(h, K_v)$ в виде [21]

$$\Phi(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & P & \alpha L K_v \\ 0 & 0 & 1 & Q & \alpha P K_v \\ 0 & 0 & 0 & B & \alpha Q K_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$L = \frac{1}{b^3} \left(\frac{b^2 h^2}{2} - bh + 1 - B \right), \quad (1.27)$$

а остальные коэффициенты определяются по формулам (1.3).
Далее последовательно вычисляем

$$v^T(0^+) = (Bv(0))^T = [1; 0; 0; 0; 1];$$

$$v^T(h) = (\Phi(h, K_0) v(0^+))^T = [1; \alpha L K_0; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1];$$

$$v^T(h^+) = (Bv(h))^T = [1; \alpha L K_0; \alpha P K_0; \alpha Q K_0; 1 - \alpha L K_0];$$

$$v(2h) = \Phi(h, K_1) v(h^+) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 (L + hP + PQ) + \alpha L (1 - \alpha L K_0) K_1 \\ \alpha K_0 (P + Q^2) + \alpha P (1 - \alpha L K_0) K_1 \\ \alpha B Q K_0 + \alpha Q (1 - \alpha K_0 L) K_1 \\ 1 - \alpha L K_0 \end{bmatrix};$$

$$v(2h^+) = Bv(2h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 (L + hP + PQ) + \alpha L (1 - \alpha L K_0) K_1 \\ \alpha K_0 (P + Q^2) + \alpha P (1 - \alpha L K_0) K_1 \\ \alpha B Q K_0 + \alpha Q (1 - \alpha K_0 L) K_1 \\ F \end{bmatrix},$$

$$v(3h) = \Phi(h, K_2) v(2h^+) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 (L + hP + PQ) + \alpha L (1 - \alpha L K_0) K_1 + \alpha h [K_0 (P + Q^2) + P (1 - \alpha L K_0) K_1] + \alpha P [B Q K_0 + Q (1 - \alpha L K_0) K_1] + \alpha L F K_2; \\ \alpha K_0 (P + Q^2) + \alpha P (1 - \alpha L K_0) K_1 + \alpha Q [B Q K_0 + Q (1 - \alpha L K_0) K_1] + \alpha P F K_2; \\ \alpha B^2 Q K_0 + \alpha B Q (1 - \alpha L K_0) K_1 + \alpha Q F K_2, \\ F \end{bmatrix},$$

где $F = 1 - \alpha [K_0 (L + hP + PQ) + L (1 - \alpha K_0 L) K_1]$.

Решая составленную на основании трех условий $x_1(3h) = 1$; $x_2(3h) = 0$; $x_3(3h) = 0$ систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha L K_0) K_1 &= -(1 + B) K_0; \quad K_0 = \frac{1}{\alpha h (P - BP + Q^2)}; \\ K_1 &= -\frac{(1 + B) K_0}{1 - \alpha L K_0}; \quad K_2 = \frac{BK_0}{F}; \\ F &= 1 - \alpha (hP + PQ - BL) K_0. \end{aligned} \right\} (1.28)$$

Передаточную функцию цифрового регулятора определим по формуле (1.23), в которой с учетом выражений (1.3), (1.27) и (1.28) коэффициенты имеют вид

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{b}{\alpha h^2 (1 - B)}; \quad b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) = -(1 + B); \quad b_2 = \\ &= \frac{K_2}{K_0} u_2(2h^+) = B; \quad B = e^{-bh}; \\ a_1 &= u_2(h^+) = 1 - \alpha L K_0 = -\frac{1}{b^2 h^2} - \frac{2 - bh}{2bh(1 - B)}; \\ a_2 &= u_2(2h^+) = F = \frac{1 - \left(bh + 1 + \frac{1}{2} b^2 h^2 \right) B}{b^2 h^2 (1 - B)}. \end{aligned} \right\} (1.29)$$

Оптимальный цифровой регулятор при единичном ступенчатом воздействии на входе системы формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2(h^+) = b_1 K_0$; $m_2 = u_2(2h^+) = b_2 K_0$. Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$ определяются вектором

$$\mathbf{v}^r(\tau) = [u_1; x_1; x_2; x_3; u_2] = [1; \alpha L(\tau) K_0; \alpha P(\tau) K_0; \alpha Q(\tau) K_0; 1], \quad (1.30)$$

$$\text{где } L(\tau) = \frac{1}{b^3} \left[\frac{b^2}{2} \tau^2 - b\tau + 1 - B(\tau) \right]; \quad P(\tau) = \frac{1}{b^3} [b\tau - 1 + B(\tau)]; \quad Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]; \quad B(\tau) = e^{-b\tau}.$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + h$, определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 [L + \tau P + QP(\tau) - (1 + B)L(\tau)] \\ \alpha K_0 [P + QQ(\tau) - (1 + B)P(\tau)] \\ \alpha K_0 [QB(\tau) - (1 + B)Q(\tau)] \\ 1 - \alpha L K_0 \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Наконец, переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 [hP + PQ - BL + \tau(Q^2 - BP) - QP(\tau) + BL(\tau)] \\ \alpha K_0 [Q^2 - BP - QQ(\tau) + BP(\tau)] \\ \alpha K_0 [BQ(\tau) - QB(\tau)] \\ 1 - \alpha K_0 (hP + PQ - BL) \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-3}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.23), (1.29)

$$W(z) = 110,33 \frac{1 - 1,8187z^{-1} + 0,81873z^{-2}}{1 + 0,82495z^{-1} + 0,15839z^{-2}}.$$

Переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях в системе на рис. 1.1, а

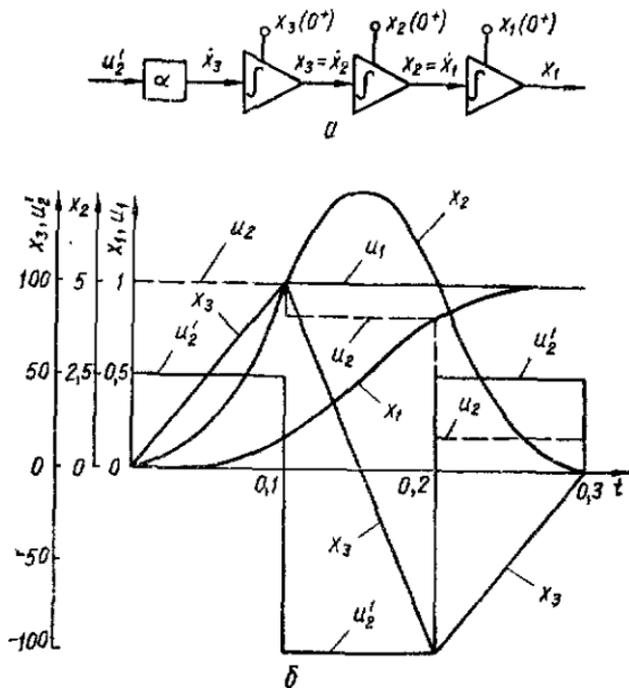


Рис. 1.8

с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, рассчитанные по формулам (1.30) — (1.32), показаны на рис. 1.7, б.

Более просто можно определить передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора для системы на рис. 1.1, а, имеющей объект регулирования третьего порядка с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^3$. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.8, а. Запишем передаточную функцию цифрового регулятора по формуле (1.23), в которой

$$\begin{aligned} K_0 &= 1/(\alpha h^3); \quad K_1 = -12/5 K_0; \quad K_2 = 6 K_0; \quad u_2(0^+) = 1; \\ a_1 &= u_2(h^+) = 1 - \frac{\alpha h^3}{6} K_0 = 5/6; \quad a_2 = u_2(2h^+) = 1 - \\ &- \left[\frac{\alpha h^3}{6} K_0 + \alpha h^3 K_0 + \left(1 - \frac{\alpha h^3}{6} K_0 \right) \frac{\alpha h^3}{6} K_1 \right] = 1/6; \quad b_1 = \\ &= \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) = -2; \quad b_2 = \frac{K_2}{K_0} u_2(2h^+) = 1. \end{aligned}$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$\varphi^T(\tau) = [u_1; x_1; x_2; x_3; u_2] = [1; \tau^3/(6h^3); \tau^2/(2h^3); \tau/h^3; 1].$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$\varphi^T(\tau) = [1; 1/6 + \tau/(2h) + \tau^2/(2h^2) - \tau^3/(3h^3); 1/(2h) + \tau/h^2 - \tau^2/h^3; 1/h^2 - 2\tau/h^3; 5/6].$$

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $t = \tau + 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, определяются вектором

$$\varphi^T(\tau) = [1; 5/6 + \tau/(2h) - \tau^2/(2h^2) + \tau^3/(6h^3); 1/(2h) - \tau/h^2 + \tau^2/(2h^3); -1/h^2 + \tau/h^3; 1/6].$$

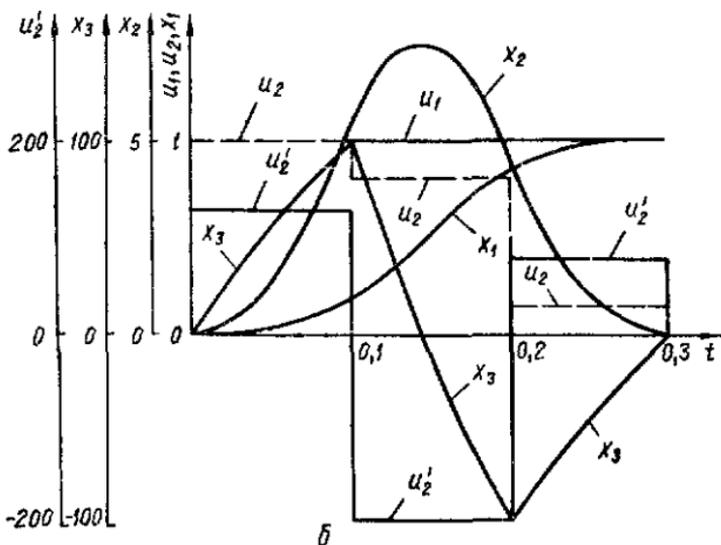
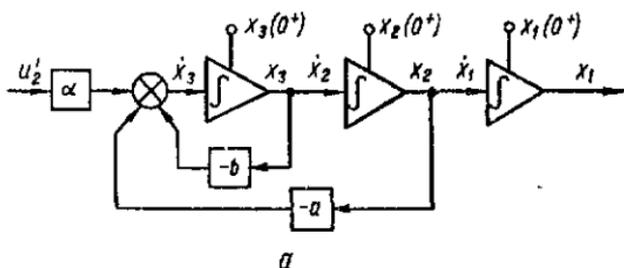


Рис. 1.9

Переходные процессы в системе (см. рис. 1.1, а) при $\alpha = 20 \text{ с}^{-3}$, $h = 0,1 \text{ с}$ изображены на рис. 1.8, б.

Рассмотрим систему (см. рис. 1.1, а), в которой математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s^2 + bs + a)]^{-1}$. Схема аналогового моделирования для такого объекта изображена на рис. 1.9, а. Запишем дифференциальные уравнения состояния для системы на

рис. 1.1, б с этим объектом регулирования (без учета переменного коэффициента усиления K_v): $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{y}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = x_3$; $\dot{x}_3 = -bx_3 - ax_2 + \alpha u_2$; $\dot{u}_2 = 0$. Уравнения переходных состояний такие же, как и для предыдущих систем с объектами третьего порядка. Перелисывая уравнения в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$ и $v(vh^+) = Bv(vh)$, по матрице коэффициентов A определяем дискретную матрицу перехода

$$\Phi(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F & R & \alpha GK_v \\ 0 & 0 & L & M & \alpha RK_v \\ 0 & 0 & -aM & D & \alpha MK_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$F = \frac{b}{a} \left[1 - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda h \right) \right]; \quad G = \frac{1}{a} \times \\ \times \left\{ h - \frac{b}{a} \left[1 - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda h \right) \right] \right\}, \quad (1.33)$$

а остальные коэффициенты определяются по формулам (1.15).

Далее на основании выражения (1.1) последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= (Bv(0))^T = [1; 0; 0; 0; 1]; \\ v^T(h) &= (\Phi(h, K_0) v(0^+))^T = [1; \alpha GK_0; \alpha RK_0; \alpha MK_0; 1]; \\ v^T(h^+) &= (Bv(h))^T = [1; \alpha GK_0; \alpha RK_0; \alpha MK_0; 1 - \alpha GK_0]; \\ v^T(2h) &= (\Phi(h, K_1) v(h^+))^T = [1; A'; B'; C'; 1 - \alpha GK_0]; \\ v^T(2h^+) &= (Bv(2h))^T = [1; A'; B'; C'; D'], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A' &= \alpha(G + RF + MR) K_0 + \alpha G(1 - \alpha GK_0) K_1; \\ B' &= \alpha(LR + M^2) K_0 + \alpha R(1 - \alpha GK_0) K_1; \\ C' &= \alpha(-aMR + DM) K_0 + \alpha M(1 - \alpha GK_0) K_1; \\ D' &= 1 - A'; \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$v(3h) = \Phi(h, K_2) v(2h^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ A' + FB' + RC' + \alpha GD' K_2 \\ LB' + MC' + \alpha RD' K_2 \\ -aMB' + DC' + \alpha MD' K_2 \\ D' \end{bmatrix}.$$

В конечное состояние систему можно перевести за три периода прерывания мгновенного ключа (за $3h$), если выполнить условия $x_1(3h) = 1$; $x_2(3h) = 0$; $x_3(3h) = 0$.

Решая составленную на основании этих условий из строк вектора $v(3h)$ систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим

$$\left. \begin{aligned}
 (1 - \alpha GK_0) K_1 &= -(D + L) K_0; \\
 K_0 &= \frac{1}{\alpha [G(1 - D)(1 - L) + RF(1 - D) + RM(1 - L) + FM^2 - aM(R^2 - GM)]}; \\
 K_1 &= -\frac{D + L}{1 - \alpha GK_0} K_0; \quad K_2 = \frac{LD + aM^2}{D'} K_0; \\
 D' &= 1 - A' = 1 - \alpha [G(1 - D - L) + R(F + M)] K_0.
 \end{aligned} \right\} (1.35)$$

Передаточная функция цифрового регулятора определяется формулой (1.23), в которой с учетом обозначений (1.15), (1.33) — (1.35) находим коэффициенты

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \frac{a}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}; \quad b_1 = \frac{K_1}{K_0} u_2(h^+) = \\
 &= -(D + L) = -2\sqrt{B} \cos \lambda h; \quad b_2 = \frac{K_2}{K_0} u_2(2h^+) = LD + aM^2 = B;
 \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned}
 B &= e^{-bh}; \quad a_1 = u_2(h^+) = 1 - \alpha GK_0 = 1 - \\
 &- \left\{ 1 - \frac{b}{ah} \left[1 - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda h \right) \right] \right\} \times \\
 &\times \frac{1}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}; \quad a_2 = u_2(2h^+) = \\
 &= D' = \left[B + \frac{b}{ah} \sqrt{B} \left(\sqrt{B} - \cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda b} \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \times \sin \lambda h \right) \right] \frac{1}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}.
 \end{aligned}$$

Оптимальный цифровой регулятор при единичном ступенчатом воздействии на входе системы формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2^*(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2^*(h^+) = b_1 K_0$; $m_2 = u_2^*(2h^+) = b_2 K_0$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha G(\tau) K_0 \\ \alpha R(\tau) K_0 \\ \alpha M(\tau) K_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

где

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= \frac{1}{a} \left\{ \tau - \frac{b}{a} \left[1 - \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda \tau \right) \right] \right\}; \\
 R(\tau) &= \frac{1}{a} \left[1 - \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right) \right]; \quad M(\tau) = \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{B(\tau)} \sin \lambda \tau; \quad B(\tau) = e^{-b\tau}.
 \end{aligned}$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 [G + RF(\tau) + MR(\tau) - (D + L)G(\tau)] \\ \alpha K_0 [RL(\tau) + MM(\tau) - (D + L)R(\tau)] \\ \alpha K_0 [-aRM(\tau) + MD(\tau) - (D + L)M(\tau)] \\ 1 - \alpha GK_0 \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

$$\text{где } F(\tau) = \frac{b}{a} \left[1 - \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda \tau \right) \right];$$

$$L(\tau) = \sqrt{B(\tau)} \left(\cos \lambda \tau + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right); \quad D(\tau) = \sqrt{B(\tau)} \times \\ \times \left(\cos \lambda \tau - \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda \tau \right).$$

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$; $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ A' + B'F(\tau) + C'R(\tau) + \alpha(LD + aM^2)G(\tau)K_0 \\ B'L(\tau) + C'M(\tau) + \alpha(LD + aM^2)R(\tau)K_0 \\ -aB'M(\tau) + C'D(\tau) + \alpha(LD + aM^2)M(\tau)K_0 \\ D' \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

где $A' = \alpha [G(1 - D - L) + R(F + M)]K_0$; $D' = 1 - A'$; $B' = \alpha(M^2 - RD)K_0$; $C' = -\alpha M(aR + L)K_0$.

Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-3}$, $b = 5 \text{ с}^{-1}$, $a = 20 \text{ с}^{-2}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.23), (1.36):

$$W(z) = 129,205 \frac{1 - 1,45174z^{-1} + 0,60653z^{-2}}{1 + 0,81092z^{-1} + 0,14718z^{-2}}.$$

Переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях в системе на рис. 1.1, а с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, рассчитанные по формулам (1.37) — (1.39), изображены на рис. 1,9 б.

Определение по изложенной методике передаточных функций оптимальных цифровых регуляторов, обеспечивающих при входном воздействии типа ступенчатой функции и нулевых начальных условиях переходные процессы на выходе систем (см. рис. 1.1, а) без перерегулирования за минимальное время, даже для систем с объектами регулирования третьего порядка, является трудоемкой задачей. Для систем с объектами регулирования четвертого порядка эта задача становится трудно разрешимой и требует новых подходов к ее решению. Однако для системы на рис. 1.1, а, имеющей объект регулирования четвертого порядка с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^4$, эту задачу можно решить достаточно просто. Для такого объекта схема аналогового моделиро-

вания показана на рис. 1.10, а. Оптимальная передаточная функция цифрового регулятора имеет вид

$$W(z) = \frac{K_0 u_2(0^+) + K_1 u_2(h^+) z^{-1} + K_2 u_2(2h^+) z^{-2} + K_3 u_2(3h^+) z^{-3}}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1} + u_2(2h^+) z^{-2} + u_2(3h^+) z^{-3}} = \\ = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$$

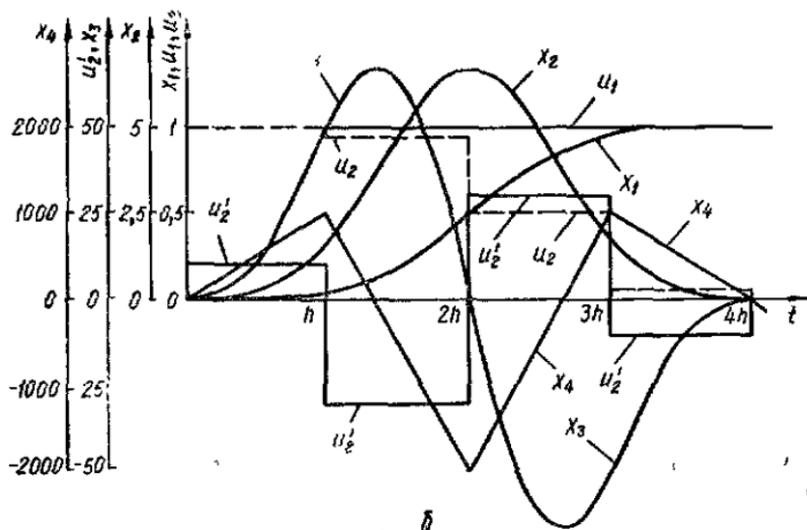
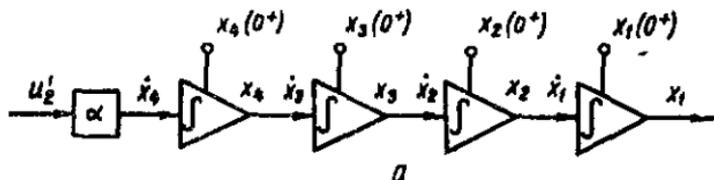


Рис. 1.10

в которой $K_0 = 1/(\alpha h^4)$; $K_1 = -\frac{72K_0}{23}$; $K_2 = 6K_0$; $K_3 = -24K_0$; $u_2(0^+) = 1$; $a_1 = u_2(h^+) = 23/24$; $a_2 = u_2(2h^+) = 1/2$; $a_3 = u_2(3h^+) = 1/24$.

Оптимальный цифровой регулятор формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования: $m_0 = u_2^i(0^+) = K_0 u_2(0^+) = K_0$; $m_1 = u_2^i(h^+) = K_1 u_2(h^+) = -3K_0$; $m_2 = u_2^i(2h^+) = K_2 u_2(2h^+) = 3K_0$; $m_3 = u_2^i(3h^+) = K_3 u_2(3h^+) = -K_0$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$\mathbf{v}^T(\tau) = [u_1, x_1, x_2, x_3, x_4, u_2] = [1; \tau^4/(24h^4); \tau^3/(6h^4); \tau^2/(2h^4); \tau/h^4; 1].$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$; $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/24 + \tau/(6h) + \tau^2/(4h^2) + \tau^3/(6h^3) - \tau^4/(8h^4) \\ 1/(6h) + \tau/(2h^2) + \tau^2/(2h^3) - \tau^3/(2h^4) \\ 1/(2h) + \tau/h^3 - 3\tau^2/(2h^4) \\ 23/24 \end{bmatrix}.$$

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 + 2\tau/(3h) - \tau^2/(3h^2) + \tau^3/(8h^3) \\ 2/(3h) - \tau^2/h^3 + \tau^3/(2h^4) \\ -2\tau/h^3 + 3\tau^2/(2h^4) \\ -2/h^3 + 3\tau/h^4 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Переходные процессы в интервале $3h^+ \leq t < 4h$; $0^+ \leq \tau < h$; $t = \tau + 3h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 23/24 + \tau/(6h) - \tau^2/(4h^2) + \tau^3/(6h^3) - \tau^4/(24h^4) \\ 1/(6h) - \tau/(2h^2) + \tau^2/(2h^3) - \tau^3/(6h^4) \\ -1/(2h^2) + \tau/h^3 - \tau^2/(2h^4) \\ 1/h^3 - \tau/h^4 \\ 1/24 \end{bmatrix}.$$

Переходные процессы системы (см. рис. 11, а) при $\alpha = 10^3 \text{ с}^{-2}$, $h = 0,1$ с изображены на рис. 110, б.

Синтез оптимальных цифровых регуляторов при входном воздействии типа ступенчатой функции для систем (см. рис. 1.1, а) с линейными объектами регулирования второго и третьего порядков и анализ переходных процессов при нулевых начальных условиях позволяют сделать следующие выводы.

1. Переходные процессы заканчиваются за два шага квантования мгновенного ключа (за время $2h$) для систем с объектами регулирования второго порядка и за три шага квантования мгновенного ключа (за время $3h$) для систем с объектами регулирования третьего порядка.

2. В момент окончания переходных процессов на входах всех интеграторов в схемах аналогового моделирования объектов регулирования устанавливаются нулевые сигналы.

3. Если объект регулирования имеет интегрирующее звено, после окончания переходных процессов установившаяся входная величина цифрового регулятора равна нулю. Если объект регулирования не имеет интегрирующего звена, после окончания переходных процессов установившаяся выходная величина цифрового регулятора не равна нулю.

4. Передаточные функции $W(z)$ оптимальных цифровых регуляторов для различных передаточных функций $G(s)$ объектов регулирования второго и третьего порядков приведены в табл. 1.1 [19]. Коэффициенты передаточных функций цифровых регуляторов зависят от параметров объекта регулирования и шага квантования h .

1.1. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем (рис. 1.1, а) при ступенчатых входных воздействиях

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
1	$\frac{\alpha}{s^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$ где $K_0 = 1/(\alpha h^2)$; $b_1 = -1$; $a_1 = 1/2$
2	$\frac{\alpha}{s(s+b)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$ где $K_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)}$; $b_1 = -B$; $a_1 = \frac{1-B(1+bh)}{bh(1-B)}$; $B = e^{-bh}$.
3	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})},$ где $K_0 = \frac{ab}{\alpha(1-A)(1-B)}$; $b_1 = -(A+B)$; $b_2 = AB$; $a_1 = \frac{bB - aA + (a-b)AB}{(a-b)(1-A)(1-B)}$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$.
4	$\frac{\alpha}{(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})},$ где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha(1-A)^2}$; $b_1 = -2A$; $b_2 = A^2$; $a_1 = \frac{A(ah-1+A)}{(1-A)^2}$; $A = e^{-ah}$
5	$\frac{\alpha}{s^2 + bs + a}$ при $4a - b^2 > 0$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})},$ где $K_0 = \frac{a}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}$; $b_1 = -2\sqrt{B} \cos \lambda h$; $b_2 = B$; $a_1 = \frac{\sqrt{B} \left(\frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h - \cos \lambda h \right) + B}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}$; $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$; $B = e^{-bh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
6	$\frac{\alpha}{s^2 + a^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{2\alpha(1 - \cos ah)}$; $b_1 = -2 \cos ah$; $b_2 = 1$; $a_1 = 1/2$</p>
7	$\frac{\alpha}{s^3}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $K_0 = 1/(\alpha h^3)$; $b_1 = -2$; $b_2 = 1$; $a_1 = 5/6$; $a_2 = 1/6$</p>
8	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$ <p>где $K_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)}$; $b_1 = -(1+B)$; $b_2 = B$; $B = e^{-bh}$; $a_1 = 1 - \frac{1}{b^2 h^2} + \frac{2-bh}{2bh(1-B)}$; $a_2 = \frac{1 - (bh + 1 + 1/2bh^2)B}{b^2 h^2(1-B)}$.</p>
9	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}};$ <p>где $K_0 = \frac{ab}{\alpha h(1-A)(1-B)}$; $b_1 = -(A+B)$; $b_2 = AB$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $a_1 = 1 - \left[1 - \frac{a+b}{abh} + \frac{b^2 A - a^2 B}{abh(b-a)} \right] \times$ $\times \frac{1}{(1-A)(1-B)}$; $a_2 = 1 - \frac{1}{abh} \left[abh + a \left(1 - bh + \frac{b}{a-b} \right) \times \right.$ $\times A + b \left(1 - ah - \frac{a}{a-b} \right) B - (a+b) \times$ $\left. \times AB \right] \frac{1}{(1-A)(1-B)}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
10	$\frac{\alpha}{s(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{\alpha h (1-A)^2}$; $b_2 = -2A$; $b_1 = A^2$; $A = e^{-ah}$; $a_1 = \frac{\frac{2}{ah}(1-A) + A(A-3)}{(1-A)^2}$ $a_2 = \frac{A \left[1 + A - \frac{2}{ah}(1-A) \right]}{(1-A)^2}$</p>
11	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}$; $b_1 = -2\sqrt{B} \cos \lambda h$; $b_2 = B$; $B = e^{-b\lambda h}$; $a_1 = 1 - \left\{ 1 - \frac{b}{ah} \left[1 - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda h \right) \right] \right\} \frac{1}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}$; $a_2 = \left[B + \frac{b}{ah} \sqrt{B} \left(\sqrt{B} - \cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda b} \sin \lambda h \right) \right] \frac{1}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}$; $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$.</p>
12	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{2\alpha h (1 - \cos ah)}$; $b_1 = -2 \cos ah$; $b_2 = 1$; $a_1 = \frac{1 - 2 \cos ah + \frac{1}{ah} \sin ah}{2(1 - \cos ah)}$; $a_2 = \frac{1 - \frac{1}{ah} \sin ah}{2(1 - \cos ah)}$.</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
13	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b) \times (s+c)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C)}$; $b_1 = -(A+B+C)$; $b_2 = AB + BC + AC$; $b_3 = -ABC$; $a_1 = 1 - \frac{1}{(1-A)(1-B)(1-C)} \left[1 - \frac{bc(b-c)A - ac(a-c)B + ab(a-b)C}{(a-b)(b-c)(a-c)} \right]$; $a_2 = \frac{1}{(1-A)(1-B)(1-C)} \left[-ABC + \frac{ab(a-b)AB + bc(b-c)BC - ac(a-c)AC}{(a-b)(b-c)(a-c)} \right]$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$</p>
14	$\frac{\alpha}{(s+b)(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{\alpha(1-B)(1-A)^2}$; $b_1 = -(B+2A)$; $b_2 = A(2B+A)$; $b_3 = -BA^2$; $a_1 = 1 - \frac{1}{(1-A)^2(1-B)} \left[1 - \frac{a^2 B - (2ab - b^2)A - ab(a-b)hA}{(a-b)^2} \right]$; $a_2 = \frac{1}{(1-A)^2(1-B)} \left[-A^2 B + \frac{a^2 A^2 - (2ab - b^2)AB + ab(a-b)hAB}{(a-b)^2} \right]$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$</p>
15	$\frac{\alpha}{(s+c)(s^2 + bs + a)}$ при $4a - b^2 > 0$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{\alpha(1-C)(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h + B)}$; $b_1 = -(C + 2\sqrt{B}\cos\lambda h)$; $b_2 = B + 2C\sqrt{B}\cos\lambda h$; $b_3 = -BC$;</p>

№ п/п	Передачная функция объекта регулирования $G(s)$	Передачная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$a_1 = 1 - \frac{1}{(1-C)(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B)} \left\{ 1 - \frac{aC}{a-bc+c^2} - \frac{c\sqrt{B}}{a-bc+c^2} \left[(c-b)\cos\lambda h + \frac{2a-b^2+cb}{2\lambda} \sin\lambda h \right] \right\};$ $a_2 = \frac{1}{(1-C)(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B)} \left\{ -BC + \frac{aB}{a-bc+c^2} + \frac{cC\sqrt{B}}{a-bc+c^2} \left[(c-b)\cos\lambda h - \frac{2a-b^2+cb}{2\lambda} \sin\lambda h \right] \right\};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; \lambda = \sqrt{a-b^2/4}$
16	$\frac{\alpha}{(s+a)^3}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $K_0 = \frac{\alpha^3}{\alpha(1-A)^3}$; $b_1 = -3A$; $b_2 = 3A^2$; $b_3 = -A^3$; $A = e^{-ah}$;</p> $a_1 = 1 - \frac{1}{(1-A)^3} \left[1 - \left(1 + ah + \frac{a^2 h^2}{2} \right) A \right];$ $a_2 = \frac{1}{(1-A)^3} \left[-A^3 - \left(1 - ah + \frac{a^2 h^2}{2} \right) A^2 \right]$
17	$\frac{\alpha}{(s+b)(s^2+a^2)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $K_0 = \frac{1}{2\alpha(1-B)(1-\cos ah)}$;</p> $b_1 = -(B+2\cos ah)$; $b_2 = 1+2B\cos ah$; $b_3 = -B$; $B = e^{-bh}$; $a_1 = 1 - \frac{1}{2(1-B)(1-\cos ah)} \left[1 - \frac{a^3 B}{a^3 + b^2} - \frac{b}{a^3 + b^2} (b \cos ah + a \sin ah) \right]$; $a_2 = \frac{1}{2(1-B)(1-\cos ah)} \left[-B + \frac{a^3}{a^3 + b^2} + \frac{bB}{a^3 + b^2} (b \cos ah - a \sin ah) \right]$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
18	$\frac{\alpha}{s^4}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$ <p>где $K_0 = 1/(\alpha h^4)$; $b_1 = -3$; $b_2 = 3$; $b_3 = -1$; $a_1 = 23/24$; $a_2 = 1/2$; $a_3 = 1/24$</p>

Б. Коэффициент усиления разомкнутой оптимальной системы (см. рис. 1.1, а), представляющий собой произведение $K_0 \alpha$, определяется параметрами объекта регулирования и шагом квантования h .

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задача определения передаточной функции $W(z)$ цифрового регулятора, включение которого в систему (см. рис. 1.1, а) обеспечивает при входном воздействии типа ступенчатой функции величинной U и нулевых начальных условиях оптимальный переходной процесс без перерегулирования за конечное и минимальное время, является достаточно сложной. Несколько проще можно определять оптимальные управляющие воздействия $u_i^*(vh^+)$ на линейные объекты регулирования [16]. Рассмотрим решение этой задачи для объекта регулирования на рис. 1.6, а. Записывая уравнение объекта регулирования (см. рис. 1.6, а) в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$, находим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_2^* \end{bmatrix}; \quad v(0^+) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2^*(0^+) \end{bmatrix}.$$

Матрицу перехода для объекта регулирования вычисляем по матрице коэффициентов A в виде

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & M & P & \alpha L \\ 0 & A & W & \alpha P \\ 0 & 0 & B & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы $\Phi(h)$ можно определить по формулам (1.9), (1.21). Учитывая, что при переходе от $v(vh)$ к $v(vh^+)$ величина $u_2^*(v - 1h^+)$ на входе объекта регулирования изменяется скачком

на $u_2^v (vh^+)$ и, обозначая $u_2^v (vh^+) = m_v$, $v = 0, 1, 2 \dots$, последовательно, находим

$$\begin{aligned} \varphi^\tau(h) &= (\Phi(h) \varphi(0^+))^\tau = [\alpha L m_0; \alpha P m_0; \alpha Q m_0; m_0]; \\ \varphi^\tau(h^+) &= [\alpha L m_0; \alpha P m_0; \alpha Q m_0; m_1]; \\ \varphi(2h) &= \Phi(h) \varphi(h^+) = \begin{bmatrix} \alpha(L + MP + PQ) m_0 + \alpha L m_1 \\ \alpha(AP + WQ) m_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha BQ m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}; \\ \varphi(2h^+) &= \begin{bmatrix} \alpha(L + MP + PQ) m_0 + \alpha L m_1 \\ \alpha(AP + WQ) m_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha BQ m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \\ \varphi(3h) &= \Phi(h) \varphi(2h^+) = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(L + MP + PQ + AMP + MWQ + BQP) m_0 + \\ + \alpha(L + PM + QP) m_1 + \alpha L m_2; \\ \alpha(A^2P + AWQ + BWQ) m_0 + \alpha(AP + QW) m_1 + \\ + \alpha P m_2; \\ \alpha B^2Q m_0 + \alpha BQ m_1 + \alpha Q m_2; \\ m_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Из последнего выражения определим значения m_0 , m_1 и m_2 , для которых совместно выполняются три условия: $x_1(3h) = U$; $x_2(3h) = 0$; $x_3(3h) = 0$. Перепишем эти условия в виде системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} (L + MP + PQ + AMP + MWQ + BQP) m_0 + \\ + (L + PM + QP) m_1 + L m_2 = U/\alpha; \\ (A^2P + AWQ + BWQ) m_0 + (AP + QW) m_1 + \\ + P m_2 = 0; \\ B^2 m_0 + B m_1 + m_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Из второго и третьего уравнений нетрудно найти

$$m_1 = -(A + B) m_0; \quad m_2 = A B m_0. \quad (1.41)$$

Подставляя выражения (1.41) в первое уравнение системы уравнений (1.40), вычисляем

$$m_0 = \frac{U}{\alpha [L(1 - A)(1 - B) + QP(1 - A) + MP(1 - B) + QWM]}.$$

Используя формулы (1.9), (1.21), после несложных преобразований окончательно получаем

$$m_0 = \frac{abU}{\alpha h(1 - A)(1 - B)}.$$

Эти результаты совпадают с полученными ранее (отметим, что $m_0 = K_0$, $m_1 = b_1 K_0$, $m_2 = b_2 K_0$ при $U = 1$ (см. коэффициенты в формуле (1.23)).

1.2. z-изображения оптимальных управляющих воздействий на линейные объекты регулирования в системах (рис. 1.1. а) при единичном ступенчатом воздействии на входе и нулевых начальных условиях

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
1	α/s^2	$K_0(1 + b_1z^{-1})$, где $K_0 = 1/(\alpha h^2)$; $b_1 = -1$
2	$\frac{\alpha}{s(s+b)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1})$, где $K_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)}$; $b_1 = -B$; $B = e^{-bh}$
3	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, где $K_0 = \frac{ab}{\alpha(1-A)(1-B)}$; $b_1 =$ $= -(A+B)$; $b_2 = AB$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$
4	$\frac{\alpha}{(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha(1-A)^2}$; $b_1 = -2A$; $b_2 = A^2$; $A = e^{-ah}$
5	$\frac{\alpha}{s^2 + bs + a}$ при $4a - b^2 > 0$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, где $K_0 = \frac{a}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}$; $b_1 = -2\sqrt{B} \cos \lambda h$; $b_2 = B$; $B = e^{-bh}$; $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
6	$\frac{\alpha}{s^2 + a^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, где $K_0 = \frac{a^2}{2\alpha(1 - \cos ah)}$; $b_1 = -2 \cos ah$; $b_2 = 1$
7	$\frac{\alpha}{s^3}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})$, где $K_0 = 1/(\alpha h^3)$; $b_1 = -2$; $b_2 = 1$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
8	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$K_0(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}),$ где $K_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)}$; $b_1 = -(1+B)$; $b_2 = B$; $B = e^{-bh}$
9	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$K_0(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}),$ где $K_0 = \frac{ab}{\alpha h(1-A)(1-B)}$; $b_1 =$ $= -(A+B)$; $b_2 = AB$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$
10	$\frac{\alpha}{s(s+a)^2}$	$K_0(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}),$ где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha h(1-A)^2}$; $b_1 = -2A$; $b_2 = A^2$, $A = e^{-ah}$
11	$\frac{\alpha}{s(s^2+bs+a)}$ при $4a-b^2 > 0$	$K_0(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}),$ где $K_0 = \frac{a}{\alpha h(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B)}$; $b_1 = -2\sqrt{B}\cos\lambda h$; $b_2 = B$; $B = e^{-bh}$; $\lambda = \sqrt{a-b^2/4}$
12	$\frac{\alpha}{s(s^2+a^2)}$	$K_0(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}),$ где $K_0 = \frac{a^2}{2\alpha h(1-\cos ah)}$; $b_1 = -2\cos ah$; $b_2 = 1$
13	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$K_0 \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1-z^{-1}},$ где $K_0 = \frac{abc}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C)}$; $b_1 = -(A+B+C)$; $b_2 = AB+$ $+BC+AC$; $b_3 = -ABC$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$

№ п/п	Передачная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
14	$\frac{\alpha}{(s+b)(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{\alpha}{b a^2 (1-B)(1-A)^2}$; $b_1 = -(B+2A)$; $b_2 = A(2B+A)$; $b_3 = -BA^2$; $B = e^{-bh}$; $A = e^{-ah}$</p>
15	$\frac{\alpha}{(s+c)(s^2+bs+a)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{ac}{\alpha(1-C)(1 - 2\sqrt{B}\cos\lambda h + B)}$; $b_1 = -(C + 2\sqrt{B}\cos\lambda h)$; $b_2 = B + 2C\sqrt{B}\cos\lambda h$; $b_3 = -BC$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$; $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$</p>
16	$\frac{\alpha}{(s+b)(s^2+a^2)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^2 b}{2\alpha(1-B)(1 - \cos ah)}$; $b_1 = -(B + 2\cos ah)$; $b_2 = 1 + 2B\cos ah$; $b_3 = -B$; $B = e^{-bh}$</p>
17	$\frac{\alpha}{(s+a)^3}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^3}{\alpha(1-A)^3}$; $b_1 = -3A$; $b_2 = 3A^2$; $b_3 = -A^3$; $A = e^{-ah}$</p>
18	$\frac{\alpha}{s^4}$	$K_0(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3});$ <p>где $K_0 = 1/(\alpha h^4)$; $b_1 = -3$; $b_2 = 3$; $b_3 = -1$</p>
19	$\frac{\alpha}{s^3(s+b)}$	$K_0(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}),$ <p>где $K_0 = \frac{b}{\alpha h^3(1-B)}$; $b_1 = -(2+B)$; $b_2 = 1 + 2B$; $b_3 = -B$; $B = e^{-bh}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
20	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{ab}{\alpha h^2(1-A)(1-B)}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{ab}{\alpha h^2(1-A)(1-B)}$; $b_1 = -(1+A+B)$; $b_2 = A+B+AB$; $b_3 = -AB$, $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$</p>
21	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)^2}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{a^2}{\alpha h^2(1-A)^2}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha h^2(1-A)^2}$; $b_1 = -(1+2A)$; $b_2 = 2A + A^2$; $b_3 = -A^2$; $A = e^{-ah}$</p>
22	$\frac{\alpha}{s^2(s^2 + bs + a)}$ при $4a - b^2 > 0$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{a}{\alpha h^2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{a}{\alpha h^2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)}$; $b_1 = -(1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h)$; $b_2 = B + 2\sqrt{B} \cos \lambda h$; $b_3 = -B$; $B = e^{-bh}$; $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$</p>
23	$\frac{\alpha}{s^2(s^2 + a^2)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{a^2}{2\alpha h^2(1 - \cos ah)}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{a^2}{2\alpha h^2(1 - \cos ah)}$; $b_1 = -(1 + 2 \cos ah)$; $b_2 = 1 + 2 \cos ah$; $b_3 = -1$</p>
24	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{abc}{\alpha h(1-A)(1-B)(1-C)}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{abc}{\alpha h(1-A)(1-B)(1-C)}$; $b_1 = -(A+B+C)$; $b_2 = AB+BC+AC$; $b_3 = -ABC$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$</p>
25	$\frac{\alpha}{s(s+b)(s+a)^2}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{a^2b}{\alpha h(1-A)^2(1-B)}$;</p> <p>где $K_0 = \frac{a^2b}{\alpha h(1-A)^2(1-B)}$; $b_1 = -(2A+B)$; $b_2 = A^2 + 2AB$; $b_3 = -A^2B$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
26	$\frac{\alpha}{s(s+c)(s^2+bs+a)}$ <p style="text-align: center;">при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p>где $K_0 = \frac{\alpha c}{\alpha h(1-C)(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h + B)}$;</p> $b_1 = -(C + 2\sqrt{B}\cos\lambda h);$ $b_2 = B + 2C\sqrt{B}\cos\lambda h; \quad b_3 = -BC;$ $B = e^{-bh}; \quad C = e^{-ch}; \quad \lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
27	$\frac{\alpha}{s(s+b)(s^2+a^2)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p>где $K_0 = \frac{2\alpha h(1 - \cos ah)(1 - B)}{ba^2}$;</p> $b_1 = -(B + 2\cos ah);$ $b_2 = 1 + 2B\cos ah; \quad b_3 = -B; \quad B = e^{-bh}$
28	$\frac{\alpha}{s(s+a)^3}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}),$ <p>где $K_0 = \frac{a^3}{\alpha h(1-A)^3}$; $b_1 = -3A$;</p> $b_2 = 3A^2; \quad b_3 = -A^3; \quad A = e^{-ah}$
29	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{abcd}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C) \times (1-D)}$;</p> $b_1 = -(A + B + C + D);$ $b_2 = AB + BC + AC + AD + BD + CD;$ $b_3 = -ABC - ABD - BCD - ACD;$ $b_4 = ABCD; \quad A = e^{-ah}; \quad B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; \quad D = e^{-dh}$
30	$\frac{\alpha}{(s+a)^2(s+b)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^2b^2}{\alpha(1-A)^2(1-B)^2}$;</p> $b_1 = -2(A + B);$ $b_2 = A^2 + B^2 + 4AB; \quad b_3 = -2AB \times (A + B); \quad b_4 = A^2B^2; \quad A = e^{-ah};$ $B = e^{-bh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z -изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
31	$\frac{\alpha}{(s^2 + bs + a)(s + c) \times (s + d)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{acd}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B) \times (1 - C)(1 - D)}$;</p> $b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D);$ $b_2 = B + CD + 2(C + D)\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_4 = BCD; B = e^{-bh}; C = e^{-ch};$ $D = e^{-dh}; \lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
32	$\frac{\alpha}{(s^2 + bs + a)(s^2 + ds + c)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$ $4c - d^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{ac}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B) \times (1 - 2\sqrt{D} \cos \sigma h + D)}$;</p> $b_1 = -2(\sqrt{B} \cos \lambda h + \sqrt{D} \cos \sigma h);$ $b_2 = B + D + 4\sqrt{BD} \cos \lambda h \cos \sigma h;$ $b_3 = -2B\sqrt{D} \cos \sigma h - 2D\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_4 = BD; B = e^{-bh}; D = e^{-dh};$ $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}; \sigma = \sqrt{c - d^2/4}$
33	$\frac{\alpha}{(s^2 + bs + a)^2}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)^2}$;</p> $b_1 = -4\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_2 = 2B + 4B \cos^2 \lambda h;$ $b_3 = -4B\sqrt{B} \cos \lambda h; b_4 = B^2;$ $B = e^{-bh}; \lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
34	$\frac{\alpha}{(s^2 + a^2)(s + c)(s + d)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^2 cd}{2\alpha(1 - \cos ah)(1 - C)(1 - D)}$;</p> $b_1 = -(2 \cos ah + C + D);$ $b_2 = 1 + CD + 2(C + D) \cos ah;$ $b_3 = -(C + D) - 2CD \cos ah; b_4 = CD,$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
35	$\frac{\alpha}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^2 b^2}{4\alpha(1 - \cos ah)(1 - \cos bh)}$; $b_1 = -2(\cos ah + \cos bh)$; $b_2 = 2 + 4 \cos ah \cos bh$; $b_3 = b_1$; $b_4 = 1$</p>
36	$\frac{\alpha}{(s + a)^4}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^4}{\alpha(1 - A)^4}$; $b_1 = -4A$; $b_2 = 6A^2$; $b_3 = -4A^3$; $b_4 = A^4$; $A = e^{-ah}$</p>
37	$\frac{\alpha}{(s^2 + a^2)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $K_0 = \frac{a^4}{4\alpha(1 - \cos ah)^2}$; $b_1 = -4 \cos ah$; $b_2 = 2 + 4 \cos^2 ah$; $b_3 = b_1$; $b_4 = 1$</p>
38	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b) \times (s+c)(s+d)}$	$K_0 (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{abcd}{\alpha h(1-A)(1-B) \times (1-C)(1-D)}$; $b_1 = -(A + B + C + D)$; $b_2 = AB + BC + AC + AD + BD + CD$; $b_3 = -(ABC + ABD + BCD + ACD)$; $b_4 = ABCD$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$; $D = e^{-dh}$</p>
39	$\frac{\alpha}{s(s+a)^2(s+b)^2}$	$K_0 (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{a^2 b^2}{\alpha h(1-A)^2(1-B)^2}$; $b_1 = -2(A + B)$; $b_2 = A^2 + B^2 + 4AB$; $b_3 = -2AB(A + B)$; $b_4 = A^2 B^2$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$</p>

№ п/п	Передающая функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
40	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a) \times (s+c)(s+d)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{acd}{\alpha h(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D)}$;</p> $b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D);$ $b_2 = B + CD + 2(C + D)\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_4 = BCD; B = e^{-bh}; C = e^{-ch};$ $D = e^{-dh}; \lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
41	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a) \times (s^2 + ds + c)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{ac}{\alpha h(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - 2\sqrt{D} \cos \sigma h + D)}$;</p> $b_1 = -2(\sqrt{B} \cos \lambda h + \sqrt{D} \cos \sigma h);$ $b_2 = B + D + 4\sqrt{BD} \cos \lambda h \cos \sigma h;$ $b_3 = -2(D\sqrt{B} \cos \lambda h + B\sqrt{D} \cos \sigma h);$ $b_4 = BD; B = e^{-bh}; D = e^{-dh}; \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $\sigma = \sqrt{c - d^2/4}$
42	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)^2}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{a^2}{\alpha h(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)^2}$;</p> $b_1 = -4\sqrt{B} \cos \lambda h; b_2 = 2B + 4B \cos^2 \lambda h;$ $b_3 = -4B\sqrt{B} \cos \lambda h; b_4 = B^2; B = e^{-bh};$ $\lambda = \sqrt{a - b^2/4}$
43	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)(s+c)(s+d)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p>где $K_0 = \frac{a^2cd}{2\alpha h(1 - \cos ah)(1 - C) \times (1 - D)}$;</p> $b_1 = -(2 \cos ah + C + D);$ $b_2 = 1 + CD + 2(C + D) \cos ah;$ $b_3 = -(C + D) - 2CD \cos ah;$ $b_4 = CD; C = e^{-ch}; D = e^{-dh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
44	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{\alpha^2 b^2}{a^2 b^2}$</p> <p>где $K_0 = \frac{\alpha^2 b^2}{4\alpha h(1 - \cos ah)(1 - \cos bh)}$; $b_1 = -2(\cos ah + \cos bh)$; $b_2 = 2 + 4 \cos ah \cos bh$; $b_3 = b_1$; $b_4 = 1$</p>
45	$\frac{\alpha}{s(s+a)^4}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{\alpha^4}{\alpha h(1-A)^4}$</p> <p>где $K_0 = \frac{\alpha^4}{\alpha h(1-A)^4}$; $b_1 = -4A$; $b_2 = 6A^2$; $b_3 = -4A^3$; $b_4 = A^4$; $A = e^{-ah}$</p>
46	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)^2}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}),$ <p style="text-align: center;">$\frac{\alpha^4}{4\alpha h(1 - \cos ah)^2}$</p> <p>где $K_0 = \frac{\alpha^4}{4\alpha h(1 - \cos ah)^2}$; $b_1 = -4 \cos ah$; $b_2 = 2 + 4 \cos^2 ah$; $b_3 = b_1$; $b_4 = 1$</p>
47	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c) \times (s+d)(s+g)}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}}{1 - z^{-1}}$ <p style="text-align: center;">$\frac{abcdg}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C) \times (1-D)(1-G)}$</p> <p>где $K_0 = \frac{abcdg}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C) \times (1-D)(1-G)}$; $b_1 = -(A + B + C + D + G)$; $b_2 = AB + AC + AD + BC + BD + DC + (A + B + C + D)G$; $b_3 = -(ABC + ABD + ADC + BDC) - (AB + AC + AD + BC + BD + DC)G$; $b_4 = ABCD + (ABC + ABD + ADC + BDC)G$; $b_5 = -ABCDG$; $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$; $D = e^{-dh}$; $G = e^{-gh}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
48	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)(s+c) \times (s+d)(s+g)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}),$ <p>где $K_0 = \frac{abcdg}{\alpha h(1-A)(1-B)(1-C) \times (1-D)(1-G)}$;</p> $b_1 = -(A + B + C + D + G);$ $b_2 = AB + AC + AD + BC + BD + DC + (A + B + C + D)G;$ $b_3 = -(ABC + ABD + ADC + BDC) - (AB + AC + AD + BC + BD + DC)G;$ $b_4 = ABCD + (ABC + ABD + ADC + BDC)G;$ $b_5 = -ABCDG; A = e^{-ah}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}; G = e^{-gh}$
49	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b) \times (s+c)(s+d)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}),$ <p>где $K_0 = \frac{abcd}{\alpha h^2(1-A)(1-B) \times (1-C)(1-D)}$;</p> $b_1 = -(1 + A + B + C + D);$ $b_2 = A + B + C + D + AB + AC + AD + BC + BD + DC;$ $b_3 = -(AB + AC + AD + BC + BD + DC) - (ABC + ABD + ADC + BDC);$ $b_4 = ABCD + (ABC + ABD + ADC + BDC);$ $b_5 = -ABCD; A = e^{-ah}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}$
50	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b) \times (s+c)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}),$ <p>где $K_0 = \frac{abc}{\alpha h^3(1-A)(1-B) \times (1-C)}$;</p> $b_1 = -(2 + A + B + C),$ $b_2 = 1 + 2(A + B + C) + AB + AC + BC,$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$b_0 = -(A + B + C) - 2(AB + AC + BC) - ABC;$ $b_4 = 2ABC + AB + AC + BC;$ $b_5 = -ABC; A = e^{-ah}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}$
51	$\frac{\alpha}{(s^2 + bs + a)(s + c) \times (s + d)(s + g)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 - z^{-1}}$ <p>где $K_0 = \frac{acdg}{\alpha(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B) \times (1 - C)(1 - D)(1 - G)}$;</p> $b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D + G);$ $b_2 = B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD + (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)G;$ $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h - [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD]G;$ $b_4 = BCD + [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h]G;$ $b_5 = -BCDG; \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; D = e^{-dh};$ $G = e^{-gh}$
52	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)(s + c) \times (s + d)(s + g)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5});$ <p>где $K_0 = \frac{acdg}{\alpha h(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D) \times (1 - G)}$;</p> $b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D + G);$ $b_2 = B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD + (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)G;$ $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h - [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD]G;$ $b_4 = BCD + [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h]G;$ $b_5 = -BCDG; \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; D = e^{-dh}; G = e^{-gh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
53	$\frac{\alpha}{s^2(s^2 + bs + a)(s + c)(s + d)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}),$ <p>где $K_0 = \frac{acd}{\alpha h^2(1 - 2\sqrt{B}\cos\lambda h + B)(1 - C)(1 - D)}$;</p> $b_1 = -(1 + 2\sqrt{B}\cos\lambda h + C + D);$ $b_2 = B + C + D + 2\sqrt{B}(1 + C + D)\cos\lambda h + CD;$ $b_3 = -(B + BC + BD + CD) - 2\sqrt{B}(C + D + CD)\cos\lambda h;$ $b_4 = B(C + D + CD) + 2CD \times \sqrt{B}\cos\lambda h;$ $b_5 = -BCD; \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; D = e^{-dh}$
54	$\frac{\alpha}{s^3(s^2 + bs + a)(s + c)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5}),$ <p>где $K_0 = \frac{ac}{\alpha h^3(1 - 2\sqrt{B}\cos\lambda h + B)(1 - C)}$;</p> $b_1 = -(2 + 2\sqrt{B}\cos\lambda h + C);$ $b_2 = 1 + B + 2C + 2\sqrt{B}(2 + C) \times \cos\lambda h;$ $b_3 = -(C + 2B + BC) - 2\sqrt{B} \times (1 + 2C)\cos\lambda h;$ $b_4 = B(1 + 2C) + 2C\sqrt{B}\cos\lambda h;$ $b_5 = -BC; \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}$
55	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c) \times (s+d)(s+g)(s+f)}$	$K_0 \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}}{1 - z^{-1}}$ <p>где $K_0 = \frac{abcdg!}{\alpha(1 - A)(1 - B)(1 - C) \times (1 - D)(1 - G)(1 - F)}$</p> $b_1 = -(A + B + C + D + G + F);$ $b_2 = AB + AC + AD + BC + BD + DC + (A + B + C + D)(G + F) + GF;$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z -изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$b_3 = -(ABC + ABD + ADC + BDC) -$ $-(AB + AC + AD + BC + BD +$ $+ DC)(G + F) - (A + B + C + D)GF,$ $b_4 = ABCD + (ABC + ABD +$ $+ ADC + BDC)(G + F) +$ $+ (AB + AC + AD + BC + BD +$ $+ DC)GF;$ $b_5 = -ABCD(G + F) - (ABC +$ $+ ABD + ADC + BDC)GF;$ $b_6 = ABCDGF;$ $A = e^{-ah}; B = e^{-bh}; C = e^{-ch};$ $D = e^{-dh}; G = e^{-gh}; F = e^{-fh}$
56	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)(s+g) \times (s+f)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} +$ $+ b_5z^{-5} + b_6z^{-6}),$ $\text{где } K_0 = \frac{abcdgf}{\alpha h(1-A)(1-B)(1-C)(1-D)(1-G) \times (1-F)}$ $b_1 = -(A + B + C + D + G + F);$ $b_2 = AB + AC + AD + BC + BD +$ $+ DC + (A + B + C + D)(G + F) +$ $+ GF;$ $b_3 = -(ABC + ABD + ADC +$ $+ BDC) - (AB + AC + AD + BC +$ $+ BD + DC)(G + F) - (A + B + C +$ $+ D)GF;$ $b_4 = ABCD + (ABC + ABD + ADC +$ $+ BDC)(G + F) + (AB + AC + AD +$ $+ BC + BD + DC)GF;$ $b_5 = -ABCD(G + F) -$ $-(ABC + ABD + ADC + BDC) \times$ $\times GF;$ $b_6 = ABCDGF;$ $A = e^{-ah}; B = e^{-bh}; C = e^{-ch};$ $D = e^{-dh}; G = e^{-gh}; F = e^{-fh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
57	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)(s+g)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}),$ <p>где $K_0 = \frac{abcdg}{\alpha h^2(1-A)(1-B) \times (1-C)(1-D) \times (1-G)}$;</p> $b_1 = -(1 + A + B + C + D + G);$ $b_2 = AB + AC + AD + BC + BD + DC + G + (A + B + C + D)(1 + G);$ $b_3 = -(ABC + ABD + ADC + BDC) - (AB + AC + AD + BC + BD + DC)(1 + G) - (A + B + C + D)G;$ $b_4 = ABCD + (ABC + ABD + ADC + BDC)(1 + G) + (AB + AC + AD + BC + BD + DC)G;$ $b_5 = -ABCD(1 + G) - (ABC + ABD + ADC + BDC)G;$ $b_6 = ABCDG;$ $A = e^{-ah}, B = e^{-bh}, C = e^{-ch},$ $D = e^{-dh}, G = e^{-gh}$
58	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b) \times (s+c)(s+d)}$	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}),$ <p>где $K_0 = \frac{abcd}{\alpha h^2(1-A)(1-B) \times (1-C)(1-D)}$;</p> $b_1 = -(2 + A + B + C + D);$ $b_2 = 1 + 2(A + B + C + D) + AB + AC + AD + BC + BD + DC;$ $b_3 = -(A + B + C + D) - 2(AB + AC + AD + BC + BD + DC) - (ABC + ABD + ADC + BDC);$ $b_4 = AB + AC + AD + BC + BD + DC + 2(ABC + ABD + ADC + BDC) + ABCD;$ $b_5 = -(ABC + ABD + ADC + BDC) - 2ABCD;$ $b_6 = ABCD; A = e^{-ah}, B = e^{-bh},$ $C = e^{-ch}, D = e^{-dh}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
59	$\frac{\alpha}{(s^2 + bs + a)(s + c) \times (s + d)(s + g) \times (s + f)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6}}{1 - z^{-1}}$ <p>где $K_0 = \frac{acdgf}{\alpha (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D) \times (1 - G)(1 - F)}$;</p> <p>$b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D + G + F)$; $b_2 = B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + DC + (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)(G + F) + GF$; $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h - [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD] \times (G + F) - (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)GF$; $b_4 = BCD + [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h](G + F) + [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD]GF$; $b_5 = -BCD(G + F) - [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h]GF$; $b_6 = BCDGF$; $\lambda = \sqrt{a - b^2}/4$; $B = e^{-bh}$; $C = e^{-ch}$; $D = e^{-dh}$; $G = e^{-gh}$; $F = e^{-fh}$</p>
60	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)(s + c)(s + d)(s + g) \times (s + f)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6}}{1 - z^{-1}}$ <p>где $K_0 = \frac{acdgf}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D) \times (1 - G)(1 - F)}$;</p> <p>$b_1 = -(2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D + G + F)$; $b_2 = B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD + (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)(G + F) + GF$; $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h - [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD] \times (G + F) - (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D)GF$; $b_4 = BCD + [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h](G + F) + [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD]GF$; $b_5 = -BCD(G + F) - [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h]GF$; $b_6 = BCDGF$;</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$b_5 = -BCD(G+F) - [B(C+D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h] GF;$ $b_6 = BCDGF, \lambda = \sqrt{a - b^2/4};$ $B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}; G = e^{-gh}; F = e^{-fh}$
61	$\frac{\alpha}{s^2(s^2 + bs + a)(s + c)(s + d)(s + g)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}),$ <p>где $K_0 = \frac{acd}{\alpha h^2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D)(1 - G)}$;</p> $b_1 = -(1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D + G);$ $b_2 = B + CD + G + 2\sqrt{B}(C + D) \times \times \cos \lambda h + (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D) \times \times (1 + G);$ $b_3 = -B(C + D) - 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h - [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD] \times \times (1 + G) - (2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D) G;$ $b_4 = BCD + [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \times \times \cos \lambda h](1 + G) + [B + 2\sqrt{B}(C + D) \cos \lambda h + CD] G;$ $b_5 = -BCD(1 + G) - [B(C + D) + 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h] G;$ $b_6 = BCDG; \lambda = \sqrt{a - b^2/4}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}; G = e^{-gh}$
62	$\frac{\alpha}{s^3(s^2 + bs + a)(s + c)(s + d)}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6}),$ <p>где $K_0 = \frac{acd}{\alpha h^3(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(1 - C)(1 - D)}$;</p> $b_1 = -(2 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h + C + D);$ $b_2 = 1 + B + 2C + 2D + CD + 2\sqrt{B}(2 + C + D) \cos \lambda h;$ $b_3 = -(1 + B)(C + D) - 2B - 2CD - 2\sqrt{B}(1 + 2C + 2D + CD) \cos \lambda h;$ $b_4 = B + CD + BCD + 2BC + 2BD + 2\sqrt{B}(C + D + CD) \cos \lambda h;$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$b_3 = -BC - BD - 2BCD -$ $- 2CD\sqrt{B} \cos \lambda h;$ $b_0 = BCD; \lambda = \sqrt{a - b^2/4}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}; D = e^{-dh}$

В табл. 1.2 приведены z-изображения оптимальных управляющих воздействий

$$M(z) = \sum_{v=0}^i u'_2(vh^+) z^{-v} = \sum_{v=0}^i m_v z^{-v}$$

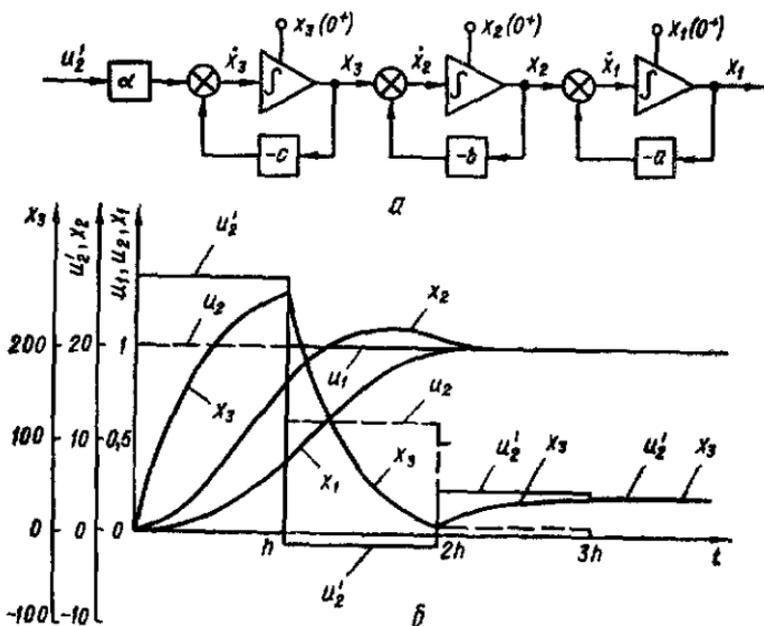


Рис. 1.11

на линейные объекты регулирования в системах (рис. 1.1, а) при единичном ступенчатом воздействии на входе систем и нулевых начальных условиях.

Поскольку в процессе определения оптимальных управляющих воздействий находятся все переменные состояния объекта, то по выходным переменным $x_1(vh^+)$ можно найти входную последовательность $u_2(vh^+)$ для цифрового регулятора и определить передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора.

Рассмотрим объект регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией вида $G(s) =$

$= \alpha [(s+a)(s+b)(s+c)]^{-1}$. Схема аналогового моделирования для объекта регулирования изображена на рис. 1.11, а. Этот объект имеет астатизм нулевого порядка. Записывая уравнения динамики объекта регулирования в векторно-матричной форме $\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v}$, где

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u'_2 \end{bmatrix}.$$

определяем расширенную дискретную матрицу перехода для объекта регулирования

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} A & N & M & \alpha L \\ 0 & B & W & \alpha P \\ 0 & 0 & C & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{cases} A = e^{-ah}; B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; Q = \frac{1}{c}(1-C); \\ N = \frac{1}{a-b}(B-A); W = \frac{1}{b-c}(C-B); \\ P = \frac{1}{bc} \left[1 + \frac{1}{b-c}(cB-bC) \right]; \\ M = \frac{A}{(b-a)(c-a)} + \frac{B}{(a-b)(c-b)} + \frac{C}{(a-c)(b-c)}; \\ L = \frac{1}{abc} \left[1 - \frac{bcA}{(b-a)(c-a)} - \frac{acB}{(a-b)(c-b)} - \frac{abC}{(a-c)(b-c)} \right]. \end{cases} \quad (1.42)$$

Обозначим $u'_2(vh^+) = m_v$ и последовательно найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T(0^+) &= [0; 0; 0; m_0]; \\ \mathbf{v}^T(h^+) &= [\alpha L m_0; \alpha P m_0; \alpha Q m_0; m_1]; \\ \mathbf{v}(2h^+) &= \begin{bmatrix} \alpha F_1 m_0 + \alpha L m_1 \\ \alpha F_2 m_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha Q C m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{v}(3h^+) &= \begin{bmatrix} \alpha S_1 m_0 + \alpha F_1 m_1 + \alpha L m_2 \\ \alpha S_2 m_0 + \alpha F_2 m_1 + \alpha P m_2 \\ \alpha Q (C^2 m_0 + C m_1 + m_2) \\ m_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $F_1 = AL + PN + QM$; $F_2 = BP + QW$; $S_1 = AF_1 + NF_2 + MCQ$; $S_2 = BF_2 + WCQ$.

Чтобы переходные процессы в объекте регулирования при нулевых начальных условиях заканчивались за время, равное $3h$, необходимо равенство вектора $\mathbf{v}(3h^+)$ вектору (при $U=1$)

$$\mathbf{v}_{\text{ж}}^T = \left[1; a; ab; \frac{abc}{\alpha} \right].$$

Составляя систему уравнений $\varphi(3h^+) = u_{ж}$ и решая ее относительно неизвестных m_0 , m_1 и m_2 , получаем

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a(Q - bP)}{\alpha Q(F_2 - CP)} - (B + C)m_0; \\ m_0 &= \frac{(Q - abL)(F_2 - CP) + a(Q - bP)(LC - F_1)}{\alpha Q(F_2 - CP)[S_1 - F_1(B + C) + LCB]}; \\ m_2 &= \frac{ab}{\alpha Q} - C^2 m_0 - C m_1. \end{aligned}$$

Используя обозначения (1.42), после преобразований записываем окончательные выражения:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{abc}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C)}; \\ m_1 &= \frac{abc(1-A-B-C)}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C)}; \\ m_2 &= \frac{abc(1-A-B-C+AB+AC+BC)}{\alpha(1-A)(1-B)(1-C)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Таким образом, оптимальный цифровой регулятор должен формировать управляющие воздействия на входе объекта регулирования в переходном режиме $m_0 = u'_2(0^+)$; $m_1 = u'_2(h^+)$; $m_2 = u'_2(2h^+)$, которые определяются выражениями (1.43), и в установившемся режиме

$$m_v = u'_2(vh^+) = abc/\alpha \quad \text{при } v \geq 3. \quad (1.44)$$

Найдем последовательность импульсов на входе цифрового регулятора:

$$u_2(0^+) = 1;$$

$$u_2(h^+) = 1 - x_1(h^+) = 1 - \alpha L m_0 = 1 - \left[1 - \frac{bc(b-c)A - ac(a-c)B + ab(a-b)C}{(a-b)(b-c)(a-c)} \right] \times$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{1}{(1-A)(1-B)(1-C)}; \\ u_2(2h^+) &= 1 - x_1(2h^+) = 1 - \alpha F_1 m_0 - \alpha L m_1 = \\ &= \left[-ABC + \frac{ab(a-b)AB + bc(b-c)BC - ac(a-c)AC}{(a-b)(b-c)(a-c)} \right] \times \\ &\times \frac{1}{(1-A)(1-B)(1-C)}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + m_3(z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-v} + \dots)}{u_2(0^+) + u_2(h^+)z^{-1} + u_2(2h^+)z^{-2}} = \\ &= K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $K_0 = m_0$; $a_1 = u_2(h^+)$; $a_2 = u_2(2h^+)$; $b_1 = \frac{m_1 - m_0}{m_0} = -(A + B + C)$; $b_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_0} = AB + BC + AC$; $b_3 = \frac{abc - \alpha m_2}{\alpha m_0} = -ABC$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с рассмотренным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, обеспечивающим минимальное время регулирования, равное $3h$, без перерегулирования выходной координаты $x_1(t)$ при единичном ступенчатом входном воздействии $u(t)$, определяются из следующих выражений.

Переходные процессы в интервале $0^+ < t < h$, $t = \tau$ определяются вектором

$$v^T(\tau) = [\alpha L(\tau) m_0; \alpha P(\tau) m_0; \alpha Q(\tau) m_0; m_0], \quad (1.48)$$

где $L(\tau) = \frac{1}{abc} \left[1 - \frac{bc(b-c)A(\tau) - ac(a-c)B(\tau) + ab(a-b)C(\tau)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \right]$;
 $P(\tau) = \frac{1}{bc} \left[1 - \frac{cB(\tau) - bC(\tau)}{b-c} \right]$; $Q(\tau) = \frac{1}{c} [1 - C(\tau)]$; $A(\tau) = e^{-a\tau}$;
 $B(\tau) = e^{-b\tau}$; $C(\tau) = e^{-c\tau}$.

Переходные процессы в интервале $h^+ < t < 2h$, $0^+ < \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [LA(\tau) + PN(\tau) + QM(\tau)] m_0 + \alpha L(\tau) m_1 \\ \alpha [PB(\tau) + QW(\tau)] m_0 + \alpha P(\tau) m_1 \\ \alpha QC(\tau) m_0 + \alpha Q(\tau) m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

где $N(\tau) = \frac{B(\tau) - A(\tau)}{a-b}$; $W(\tau) = \frac{C(\tau) - B(\tau)}{b-c}$; $M(\tau) = \frac{A(\tau)}{(b-a)(c-a)} + \frac{B(\tau)}{(a-b)(c-b)} + \frac{C(\tau)}{(a-c)(b-c)}$.

Переходные процессы в интервале $2h^+ < t < 3h$, $0^+ < \tau < h$, $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha (F_1 m_0 + L m_1) A(\tau) + \alpha (F_2 m_0 + P m_1) N(\tau) + \\ + \alpha Q (C m_0 + m_1) M(\tau) + \alpha L(\tau) m_2 \\ \alpha (F_2 m_0 + P m_1) B(\tau) + \alpha Q (C m_0 + m_1) W(\tau) + \alpha P(\tau) m_2 \\ \alpha Q (C m_0 + m_1) C(\tau) + \alpha Q(\tau) m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 250 \text{ с}^{-2}$, $a = 20 \text{ с}^{-1}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $c = 25 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.43) — (1.47):

$$W(z) = 27,8026 \frac{1 - 1,0362z^{-1} + 0,1891z^{-2} - 0,009095z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,5980z^{-1} + 0,03840z^{-2})}.$$

Переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях в системе на рис. 1.1, а с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, рассчитанные по формулам (1.48) — (1.50), изображены на рис. 1.11, б.

В рассмотренном примере коэффициенты a_1 и a_2 передаточной функции оптимального цифрового регулятора определены в аналитическом виде. Однако более рационально определять коэффициенты a_i численными методами по известному оптимальному управляющему воздействию на входе объекта и передаточной функции объекта регулирования.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБЪЕКТАМИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ВХОДНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Общее аналитическое выражение для оптимального управляющего воздействия на входе стационарного линейного объекта регулирования. Рассмотрим стационарный линейный объект регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией общего вида

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^r \prod_{i=r+1}^N (s + \alpha_i)}, \quad (1.51)$$

где сопрягающие частоты α_i могут быть вещественные (положительные и / или отрицательные) и комплексно-сопряженные (с положительными и / или отрицательными вещественными частями). Число r определяет порядок астатизма объекта. При $r = 0$ объект статический, при $r = 1$ — с астатизмом 1-го порядка, при $r = 2$ — с астатизмом 2-го порядка; N — степень полинома в знаменателе передаточной функции $G(s)$.

Дискретную передаточную функцию участка системы на рис. 1.1, а «фиксатор нулевого порядка + объект регулирования» определим z -преобразованием

$$\begin{aligned} HG(z) &= Z\{H(s)G(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-hs}}{s} G(s)\right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Разложим $G(s)/s$ на элементарные дроби

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha}{s^{r+1} \prod_{i=r+1}^N (s + \alpha_i)} = \sum_{q=1}^{r+1} \frac{D_{0q}}{s^q} + \sum_{i=r+1}^N \frac{D_i}{s + \alpha_i}, \quad (1.53)$$

где неопределенные коэффициенты вычислим, используя формулы вычетов

$$\left. \begin{aligned} D_{0q} &= \frac{1}{(r+1-q)!} \left[\frac{d^{r+1-q}}{ds^{r+1-q}} s^r G(s) \right]_{s=0}; \\ D_i &= \left[(s + \alpha_i) \frac{G(s)}{s} \right]_{s=-\alpha_i}, \quad i=r+1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

либо метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим вначале статический объект регулирования ($r = 0$). По формулам (1.53) и (1.54) находим

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha}{s \prod_{i=1}^N (s + \alpha_i)} = \frac{D_{01}}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{s + \alpha_i},$$

где

$$D_{01} = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^N \alpha_i}; \quad D_i = - \frac{\alpha}{\alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (-\alpha_j + \alpha_i)}.$$

Запишем соответствующее z -преобразование

$$Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{D_{01}}{1 - z^{-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{1 - A_i z^{-1}},$$

где $A_i = e^{-\alpha_i h}$.

Согласно выражению (1.52) имеем

$$HG(z) = D_{01} + (1 - z^{-1}) \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{1 - A_i z^{-1}}.$$

Перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$HG(z) = D_{01} + (1 - z^{-1}) \frac{\sum_{i=1}^N D_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - A_i z^{-1})}. \quad (1.55)$$

Используя z -преобразование управляющего воздействия на входе фиксатора нулевого порядка $M(z)$ и дискретную передаточную функцию участка системы (рис. 1.1, а) «фиксатор нулевого порядка + объект регулирования» $HG(z)$, запишем z -изображение выхода системы

$$X(z) = M(z) HG(z) = D_{01} M(z) + \sum_{i=1}^N D_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1}) + M(z)(1 - z^{-1}) \frac{\prod_{i=1}^N (1 - A_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - A_i z^{-1})}. \quad (1.56)$$

Установившееся значение выходной координаты системы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z). \quad (1.57)$$

Если в выражении (1.56)

$$M(z) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^N (1 - A_i z^{-1})}{(1 - z^{-1})} \quad (1.58)$$

(нули полинома $M(z)$ совпадают с полюсами передаточной функции $HG(z)$ — см. формулу (1.55)), то

$$X(z) = D_{01} K_0 \frac{\prod_{i=1}^N (1 - A_i z^{-1})}{1 - z^{-1}} + K_0 \sum_{i=1}^N D_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1}) \quad (1.59)$$

и переходный процесс на выходе системы заканчивается за N шагов квантования, т. е. за время Nh (независимо от того, являются ли величины α_i положительными или отрицательными вещественными, комплексно-сопряженными с положительными или отрицательными вещественными частями, т. е. независимо от того, является ли объект регулирования устойчивым или неустойчивым). При этом установившееся значение выходной величины можно определить по формуле (1.57)

$$\lim_{n \rightarrow N} x[n] = D_{01} K_0 \prod_{i=1}^N (1 - A_i). \quad (1.60)$$

При единичном ступенчатом воздействии на входе системы установившееся значение выходной величины должно быть равно 1 (если на вход системы поступает ступенчатое воздействие величиной U , то правые части в формулах (1.58) — (1.60) надо умножить на U и установившееся значение выходной величины должно быть равным U). При этом условии из выражения (1.60) находим коэффициент

$$K_0 = \frac{1}{D_{01} \prod_{i=1}^N (1 - A_i)} = \frac{\prod_{i=1}^N \alpha_i}{\alpha \prod_{i=1}^N (1 - A_i)}, \quad A_i = e^{-\alpha_i h}. \quad (1.61)$$

z -изображение оптимального управляющего воздействия можно представить в виде

$$M(z) = \frac{K_0}{1 - z^{-1}} (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_N z^{-N} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots), \quad (1.62)$$

где $m_0 = K_0$; $b_i = (m_i - m_{i-1})/m_0$; $i = 1, \dots, N$.

Таким образом, по формулам (1.58), (1.61), (1.62) можно определить амплитуды импульсов длительностью h оптимального управляющего воздействия на входе объекта регулирования (после фиксатора нулевого порядка) непосредственно через параметры передаточной функции объекта регулирования и шаг квантования h .

Для объекта регулирования с астатизмом 1-го порядка ($r = 1$), имеющего функцию

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha}{s^2 \prod_{i=2}^N (s + \alpha_i)} = \frac{D_{01}}{s} + \frac{D_{02}}{s^2} + \sum_{i=2}^N \frac{D_i}{s + \alpha_i},$$

где $D_{02} = \frac{\alpha}{N \prod_{i=2}^N \alpha_i}$; $D_i = \frac{\alpha}{\alpha_i^2 \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N (-\alpha_j + \alpha_i)}$, найдем

$$HG(z) = D_{01} + \frac{z^{-1} h D_{02}}{1 - z^{-1}} + (1 - z^{-1}) \frac{\sum_{i=2}^N D_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1})}{\prod_{i=2}^N (1 - A_i z^{-1})}.$$

Если $M(z) = K_0 \prod_{i=2}^N (1 - A_i z^{-1})$, где $K_0 = \frac{1}{h D_{02} \prod_{i=2}^N (1 - A_i)}$ =

$$= \frac{\prod_{i=2}^N \alpha_i}{\alpha h \prod_{i=2}^N (1 - A_i)}, \quad A_i = e^{-\alpha_i h},$$

то переходный процесс на выходе

системы заканчивается за N шагов квантования.

Для объекта регулирования с астатизмом 2-го порядка ($r = 2$), имеющего функцию

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha}{s^3 \prod_{i=3}^N (s + \alpha_i)} = \frac{D_{01}}{s} + \frac{D_{02}}{s^2} + \frac{D_{03}}{s^3} + \sum_{i=3}^N \frac{D_i}{s + \alpha_i},$$

где $D_{03} = \frac{\alpha}{N \prod_{i=3}^N \alpha_i}$; $D_i = \frac{\alpha}{(-\alpha_i)^2 \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^N (-\alpha_j + \alpha_i)}$, найдем

$$HG(z) = D_{01} + \frac{z^{-1} h D_{02}}{1 - z^{-1}} + \frac{h^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^2} D_{03} +$$

$$+ (1 - z^{-1}) \frac{\sum_{i=3}^N D_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1})}{\prod_{i=3}^N (1 - A_i z^{-1})}.$$

Если

$$M(z) = K_0 (1 - z^{-1}) \prod_{i=3}^N (1 - A_i z^{-1}),$$

$$\text{где } K_0 = \frac{1}{h^2 D_{03} \prod_{i=3}^N (1 - A_i)} = \frac{\prod_{i=3}^N \alpha_i}{\alpha h^2 \prod_{i=3}^N (1 - A_i)}, \quad A_i = e^{-\alpha_i h},$$

то переходный процесс на выходе системы заканчивается за N шагов квантования.

Сформулируем основной результат: в системе (см. рис. 1.1, а), имеющей объект регулирования с передаточной функцией (1.51), для получения оптимального по быстродействию переходного процесса при ступенчатом входном воздействии величиной U и нулевых начальных условиях цифровой регулятор на входе объекта (перед фиксатором нулевого порядка) должен сформировать управляющее воздействие, z -изображение которого определяется выражением

$$M(z) = K_0 U (1 - z^{-1})^{r-1} \prod_{i=r+1}^N (1 - A_i z^{-1}), \quad (1.63)$$

где

$$K_0 = \frac{\prod_{i=r+1}^N \alpha_i}{\alpha h^r \prod_{i=r+1}^N (1 - A_i)}, \quad A_i = e^{-\alpha_i h}. \quad (1.64)$$

При $r > 1$ и $U = 1$

$$\begin{aligned} M(z) &= K_0 (1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}) = \\ &= m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_{N-1} z^{-N+1}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

где амплитуды импульсов длительностью h оптимального управляющего воздействия на входе объекта регулирования (выходе фиксатора нулевого порядка) определяются как $m_0 = K_0$; $m_i = b_i K_0$.

Учитывая, что

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \frac{\alpha_i}{1 - A_i} = \frac{1}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} A_i = 1,$$

формулы (1.63), (1.64) можно также получить из выражений (1.58), (1.61) путем предельного перехода.

При комплексно-сопряженных частотах $(s + \alpha_j)(s + \alpha_j) = (s + \sigma + j\lambda)(s + \sigma - j\lambda) = s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \lambda^2 = s^2 + bs + a$; $b = 2\sigma$; $a = \sigma^2 + \lambda^2$.

Таким образом, по формулам (1.63), (1.64) можно определять оптимальные управляющие воздействия для объектов регулирования с любым порядком астатизма, с аperiodическими, коле-

бательными, консервативными устойчивыми и неустойчивыми звеньями.

Определение передаточных функций оптимальных для ступенчатых входных воздействий цифровых регуляторов. Передаточная функция цифрового регулятора определяется как отношение z -преобразований выхода регулятора (управляющего воздействия на входе фиксатора нулевого порядка) ко входу (ошибке системы на выходе мгновенного ключа) при нулевых начальных условиях

$$W(z) = M(z)/\Theta(z). \quad (1.66)$$

z -изображение ошибки системы (рис. 1.1, а после мгновенного ключа) при единичном ступенчатом воздействии на входе системы

$$\Theta(z) = 1(z) - X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - X(z). \quad (1.67)$$

При оптимальном управлении объектом z -изображение выхода системы со статическим объектом регулирования ($r=0$) определяется выражением (1.59). Для объекта регулирования с астатизмом 1-го порядка

$$\begin{aligned} X(z) = & D_{01}K_0 \prod_{i=2}^N (1 - A_i z^{-1}) + hD_{02}K_0 \frac{z^{-1} \prod_{i=2}^N (1 - A_i z^{-1})}{1 - z^{-1}} + \\ & + K_0 (1 - z^{-1}) \sum_{i=2}^N D_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1}), \end{aligned} \quad (1.68)$$

где коэффициент K_0 можно определить по формуле (1.64) при $r=1$. Для объекта регулирования с астатизмом 2-го порядка

$$\begin{aligned} X(z) = & D_{01}K_0 (1 - z^{-1}) \prod_{i=3}^N (1 - A_i z^{-1}) + \\ & + hD_{02}K_0 z^{-1} \prod_{i=3}^N (1 - A_i z^{-1}) + h^2 D_{03}K_0 \frac{z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})} \times \\ & \times \prod_{i=3}^N (1 - A_i z^{-1}) + K_0 (1 - z^{-1})^2 \sum_{i=3}^N D_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^N (1 - A_j z^{-1}), \end{aligned} \quad (1.69)$$

где коэффициент K_0 можно определить по формуле (1.64) при $r=2$.

Определим передаточную функцию оптимального для ступенчатых входных воздействий цифрового регулятора в системе на рис. 1.1, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^2 (s + \alpha_i)},$$

где $\alpha_1 = a$; $\alpha_2 = b$; $r = 0$; $N = 2$.

По формулам (1.54) находим

$$D_{01} = \frac{\alpha}{ab}; \quad D_1 = \frac{\alpha}{a(a-b)}; \quad D_2 = -\frac{\alpha}{b(a-b)}.$$

Обозначим $A_1 = A = e^{-ah}$; $A_2 = B = e^{-bh}$. Согласно выражениям (1.58) и (1.62) запишем

$$M(z) = K_0 \frac{(1 - Az^{-1})(1 - Bz^{-1})}{1 - z^{-1}} = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

где $K_0 = \frac{ab}{\alpha(1-A)(1-B)}$; $b_1 = -(A+B)$; $b_2 = AB$.

По формулам (1.59) и (1.67) найдем

$$\Theta(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{(1 - Az^{-1})(1 - Bz^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - A)(1 - B)} - \frac{ab}{\alpha(1-A)(1-B)} \left[\frac{\alpha(1 - Bz^{-1})}{a(a-b)} - \frac{\alpha(1 - Az^{-1})}{b(a-b)} \right] = 1 + a_1 z^{-1},$$

где $a_1 = \frac{bB - aA + (a-b)AB}{(a-b)(1-A)(1-B)}$.

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора

$$W(z) = \frac{M(z)}{\Theta(z)} = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})}.$$

Описанный способ нахождения в аналитическом виде передаточных функций $W(z)$ оптимальных цифровых регуляторов для систем (см рис. 1.1, а) с объектами регулирования высокого порядка по формулам (1.59), (1.63) — (1.69) часто приводит к громоздким и трудоемким математическим выкладкам, а аналитические выражения для коэффициентов a_i передаточной функции $W(z)$ цифрового регулятора получаются сложные.

Рассмотрим другой численно-аналитический способ получения передаточных функций $W(z)$ оптимальных цифровых регуляторов, который заключается в следующем. По табл. 1.2 или по формулам (1.63), (1.64) находим в аналитическом виде z -изображение оптимального управляющего воздействия $M(z)$ для заданной передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования. По заданным параметрам передаточной функции $G(s)$ и шаге квантования h рассчитываем коэффициенты K_0 и b_i и определяем оптимальное управляющее воздействие $m(t) \equiv u_2'(t)$ непосредственно на входе объекта. Зная воздействие $m(t)$ и передаточную функцию объекта регулирования, численным методом определяем выходную координату системы $x(t)$. По дискретным значениям выходной координаты $x(vh^+)$, $v = 0, 1, 2, \dots$, находим дискретные значения ошибки системы $\Theta(vh^+) = 1 - x(vh^+)$ и передаточную функцию

$$W(z) = \frac{M(z)}{\Theta(z)} = \frac{M(z)}{\sum_{v=0}^{N-1} \Theta(vh^+) z^{-v}}, \quad (1.70)$$

где N — порядок полинома в знаменателе передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования.

Кратко рассмотрим численный способ определения выходной координаты объекта регулирования $x(t)$, которая является выходной координатой системы на рис. 1.1, а.

Уравнение идеального интегрирующего звена имеет вид

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Это уравнение можно преобразовать в разностное с помощью дискретизации. Для малых шагов квантования h_0 непрерывное интегрирование можно заменить численным интегрированием, например, по методу трапеций:

$$x_n = h_0 \left(\frac{u_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i + \frac{u_n}{2} \right),$$

где $x_n = x(nh_0)$; $u_n = u(nh_0)$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Этот алгоритм вычисления интеграла является нерекуррентным. Для программирования на ЭВМ более удобным является рекуррентный алгоритм, который получается следующим образом. Запишем предыдущее значение переменной x_n

$$x_{n-1} = h_0 \left(\frac{u_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} u_i + \frac{u_{n-1}}{2} \right)$$

и найдем разность

$$x_n - x_{n-1} = h_0 \left(u_{n-1} + \frac{u_n}{2} - \frac{u_{n-1}}{2} \right) = \frac{h_0}{2} (u_n + u_{n-1}).$$

Тогда

$$x_n = x_{n-1} + \frac{h_0}{2} (u_n + u_{n-1}). \quad (1.71)$$

Выражение (1.71) представляет собой рекуррентное разностное уравнение, определяющее связь выходной и входной переменных для интегрирующего звена.

Для апериодического звена на основании формулы (1.71) запишем следующие соотношения:

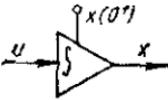
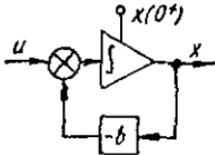
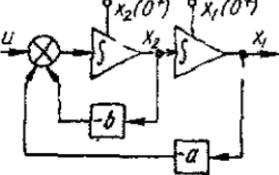
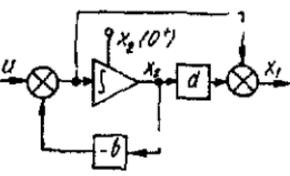
$$x_n = x_{n-1} + \frac{h_0}{2} (\dot{x}_n + \dot{x}_{n-1}); \quad \dot{x}_n = u_n - bx_n,$$

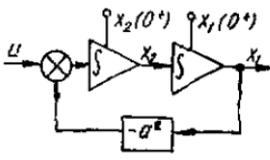
из которых находим

$$x_n = \frac{2 - bh_0}{2 + bh_0} x_{n-1} + \frac{h_0}{2 + bh_0} (u_n + u_{n-1}).$$

Аналогичным образом, используя выражение (1.71), можно получить рекуррентные разностные уравнения для колебательного, консервативного, форсирующего и других линейных динамических звеньев, из которых состоит математическая модель объекта регулирования. Такие разностные уравнения для различных звеньев приведены в табл. 1.3. Составляя линейную математическую модель объекта регулирования в виде комбинации

1.3. Рекуррентные формулы для расчета непрерывной части систем (по методу трапеций)

Тип звена и его передаточная функция	Схема в переменных состояния	Рекуррентные формулы
Интегрирующее $\frac{1}{s}$		$x_n = x_{n-1} + \frac{h_0}{2} (u_n + u_{n-1})$
Аперриодическое $\frac{1}{s + b}$		$x_n = \frac{2 - bh_0}{2 + bh_0} x_{n-1} + \frac{h_0}{2 + bh_0} (u_n + u_{n-1})$
Колебательное $\frac{1}{s^2 + bs + a}$		$x_{2n} = \frac{4 - 2bh_0 - ah_0^2}{4 + 2bh_0 + ah_0^2} \times x_{2n-1} - \frac{4ah_0}{4 + 2bh_0 + ah_0^2} \times x_{1n-1} + \frac{2h_0}{4 + 2bh_0 + ah_0^2} (u_n + u_{n-1});$ $x_{1n} = x_{1n-1} + \frac{h_0}{2} (x_{2n} + x_{2n-1})$
Форсирующее $\frac{s + d}{s + b}$		$x_{2n} = \frac{2 - bh_0}{2 + bh_0} x_{2n-1} + \frac{h_0}{2 + bh_0} (u_n + u_{n-1});$ $x_{1n} = u_n + (d - b) x_{2n}$

Тип звена и его передаточная функция	Схема в переменных состояниях	Рекуррентные формулы
Консервативное $\frac{1}{s^2 + a^2}$	 <p>The diagram shows a control system with two integrators (S blocks) in series. The input u is summed with a feedback signal from a block labeled $-a^2$. The output of the first integrator is $x_2(0^+)$ and the output of the second is $x_1(0^+)$.</p>	$x_{2n} = \frac{4 - a^2 h_0^2}{4 + a^2 h_0^2} x_{2n-1} - \frac{4a^2 h_0}{4 + a^2 h_0^2} x_{1n-1} + \frac{2h_0}{4 + a^2 h_0^2} (u_n + u_{n-1});$ $x_{1n} = x_{1n-1} + \frac{h_0}{2} (x_{2n} + x_{2n-1})$

различных линейных динамических звеньев, с учетом табл. 1.3 можно легко вычислить выходную координату объекта регулирования $x(t)$ при поступлении на вход объекта управляющих воздействий $m(t)$ и различных начальных значениях $x_0 = x(0^+)$ и $u_0 = u(0^+)$ переменных состояния каждого звена. Шаг квантования h_0 при численном интегрировании должен быть значительно меньше шага квантования h мгновенного ключа в системе на рис. 1.1, a (обычно $h = (50 \dots 100) h_0$) и на порядок меньше наименьшей постоянной времени объекта регулирования для получения высокой точности расчетов. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Математическая модель объекта регулирования в системе на рис. 1.1, a описывается передаточной функцией

$$G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)]^{-1},$$

где $\alpha = 800 \text{ с}^{-3}$; $a = 20 \text{ с}^{-1}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Шаг квантования мгновенного ключа в системе на рис. 1.1, a $h = 0,1 \text{ с}$.

Для заданной передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования по табл. 1.2 (п. 9) находим z -изображение оптимального управляющего воздействия

$$M(z) = K_0 (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = 3,19005 (1 - 0,95407z^{-1} + 0,11080z^{-2}).$$

Таким образом, на выходе цифрового регулятора должна быть последовательность мгновенных импульсов с периодом следования h , площади которых $m_0 = m(0^+) = K_0 = 3,19005$; $m_1 = m(h^+) = b_1 K_0 = -3,04352$; $m_2 = m(2h^+) = b_2 K_0 = 0,35347$, или на входе объекта (после фиксатора нулевого порядка) должна быть последовательность импульсов, имеющих одинаковую длительность h , но разные амплитуды, соответственно равные m_0 , m_1 , m_2 .

По управляющему воздействию на входе объекта $m(t)$ и передаточной функции объекта регулирования $G(s)$ определяем выходную координату объекта (выход системы на рис. 1.1, a) $x(t)$ и ошибку в системе $\Theta(t) = 1 - x(t)$. Выходная координата си-

стемы и управляющее воздействие на входе объекта регулирования изображены на рис. 1.12. Определив ошибку $\Theta(vh^+) = \Theta(t)$ при $t = vh^+, v = 0, 1, 2, \dots$, на выходе мгновенного ключа в системе на рис. 1.1, а, запишем передаточную функцию оптимального цифрового регулятора согласно выражению (1.70)

$$W(z) = 3,19005 \frac{1 - 0,95407z^{-1} + 0,11080z^{-2}}{1 + 0,76955z^{-1} + 0,10761z^{-2}}.$$

Пример 2. Математическая модель объекта регулирования в системе на рис. 1.1, а описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+c)(s^2+bs+a)]^{-1}$, где $\alpha = 10^4 \text{ с}^{-4}$; $c = 10 \text{ с}^{-1}$; $b = 1 \text{ с}^{-1}$; $a = 2 \text{ с}^{-2}$. Шаг квантования мгновенного ключа в системе на рис. 1.1, а $h = 0,1 \text{ с}$.

Для заданной передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования из табл. 1.2 (п.26) находим z -изображение оптимального управляющего воздействия

$$\begin{aligned} M(z) &= K_0(1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}) = \\ &= 1,6652(1 - 2,2537z^{-1} + 1,5986z^{-2} - 0,3329z^{-3}). \end{aligned}$$

Таким образом, на выходе цифрового регулятора должна быть последовательность мгновенных импульсов

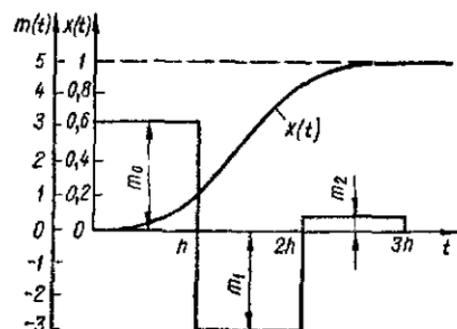


Рис. 1.12

с периодом следования h , площади которых $m_0 = m(0^+) = K_0 = 1,6652$; $m_1 = m(h^+) = b_1K_0 = -3,7528$; $m_2 = m(2h^+) = b_2K_0 = 2,6619$; $m_3 = m(3h^+) = b_3K_0 = -0,5543$, или на входе объекта (после фиксатора нулевого порядка) должна быть последовательность импульсов, имеющих одинаковую длительность h , но разные амплитуды, соответственно равные m_0, m_1, m_2, m_3 .

По управляющему воздействию на входе объекта $m(t)$ и передаточной функции объекта регулирования $G(s)$ по изложенной методике определяем выходную координату объекта (выход системы на рис. 1.1, а) $x(t)$ и ошибку в системе $\Theta(t) = 1 - x(t)$. Выходная координата системы и управляющее воздействие на входе объекта регулирования изображены на рис. 1.13. Определив ошибку системы $\Theta(vh^+) = \Theta(t)$ при $t = vh^+, v = 0, 1, 2, \dots$ на выходе мгновенного ключа, запишем передаточную функцию оптимального цифрового регулятора согласно выражению (1.70)

$$W(z) = 1,6652 \frac{1 - 2,2537z^{-1} + 1,5986z^{-2} - 0,3329z^{-3}}{1 + 0,9522z^{-1} + 0,4707z^{-2} + 0,0371z^{-3}}.$$

Пример 3. Математическая модель объекта регулирования в системе на рис. 1.1, а описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)(s+g)(s+f)]^{-1}$, где $\alpha = 10^5 \text{ с}^{-7}$; $a = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $b = 1 \text{ с}^{-1}$; $c = 2 \text{ с}^{-1}$; $d = 10 \text{ с}^{-1}$; $g = 100 \text{ с}^{-1}$; $f = 200 \text{ с}^{-1}$. Шаг квантования мгновенного ключа в системе на рис. 1.1, а $h = 1 \text{ с}$.

Для заданной передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования по табл. 1.2 (п.52) находим z -изображение оптимального управляющего воздействия

$$M(z) = K_0 (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6}) \approx 9,30018 (1 - 1,10979z^{-1} + 0,35505z^{-2} - 0,030214z^{-3}),$$

где коэффициенты b_4 , b_5 и b_6 пренебрежимо малы.

Таким образом, на выходе цифрового регулятора должна быть последовательность мгновенных импульсов с периодом сле-

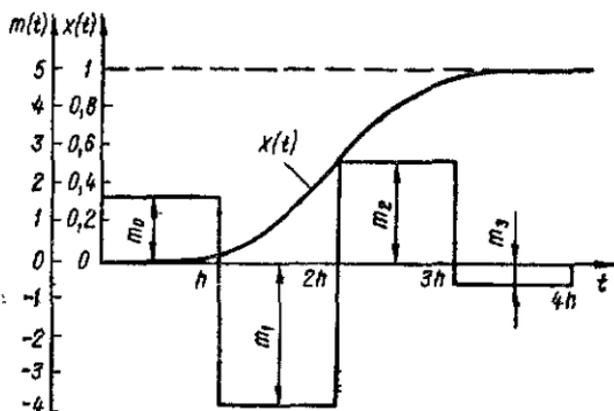


Рис. 1.13

дования h , площади которых $m_0 = m(0^+) = K_0 = 9,30018$; $m_1 = m(h^+) = b_1 K_0 = -10,32125$; $m_2 = m(2h^+) = b_2 K_0 = 3,30205$; $m_3 = m(3h^+) = b_3 K_0 = -0,28099$, или на входе объекта (после фиксатора нулевого порядка) должна быть последовательность импульсов, имеющих одинаковую длительность h , но разные амплитуды, соответственно равные m_0, m_1, m_2, m_3 .

Выходная координата системы и управляющее воздействие на входе объекта регулирования изображены на рис. 1.14. Определив ошибку системы $\Theta(vh^+) = 1 - x(vh^+)$ на выходе мгновенного ключа, запишем передаточную функцию оптимального цифрового регулятора согласно выражению (1.70)

$$W(z) = 9,30018 \frac{1 - 1,10979z^{-1} + 0,35505z^{-2} - 0,030214z^{-3}}{1 + 0,94151z^{-1} + 0,41545z^{-2} + 0,02846z^{-3}}.$$

На основании расчетов можно заключить, что в данном случае дискретная модель объекта регулирования при принятом шаге квантования h и указанных частотах сопряжения имеет не седьмой, а четвертый порядок.

Изложим еще один способ определения передаточных функций $W(z)$ оптимальных для ступенчатых воздействий на входе системы рис. 1.1, а цифровых регуляторов [31]. Обозначим входную и выходную координаты системы и выходную дискрету цифрового регулятора в момент времени $t = vh^+$ соответственно $u(vh^+) \equiv u(v)$; $x(vh^+) \equiv x(v)$; $m(vh^+) = m_v = m(v)$.

При единичном ступенчатом воздействии на входе системы рис. 1.1, а с оптимальным цифровым регулятором справедливы

следующие соотношения: $x(v) = u(v) = 1$ и $m(v) = m(N)$ для $v \geq N$, где N — порядок полинома в знаменателе передаточной функции $G(s)$ объекта регулирования.

Используя z -преобразования для последовательностей $u(v)$, $x(v)$, $m(v)$ при $v = 0, 1, 2, \dots$, запишем

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}};$$

$$X(z) = x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + z^{-N}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots);$$

$$M(z) = m(0) + m(1)z^{-1} + \dots$$

$$\dots + m(N)z^{-N}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)$$

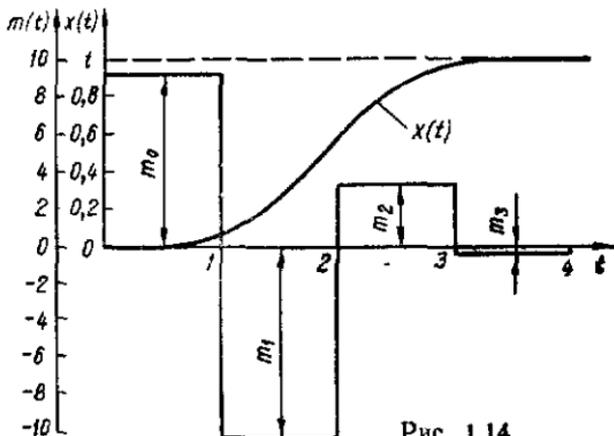


Рис. 1.14

при статических

$$M(z) = m(0) + m(1)z^{-1} + \dots + m(N-1)z^{-N+1}$$

при астатических объектах регулирования.

Допустим, что дискретная передаточная функция объекта регулирования с фиксатором нулевого порядка при заданном шаге квантования h определена и имеет вид

$$HG(z) = \frac{X(z)}{M(z)} = \frac{c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_N z^{-N}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_N z^{-N}}. \quad (1.72)$$

Определим дискретную передаточную функцию замкнутой системы (см. рис. 1.1, а) в виде

$$K_3(z) = \frac{W(z)HG(z)}{1 + W(z)HG(z)} = \frac{X(z)}{U(z)} = k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} + \dots + k_N z^{-N},$$

где $k_1 = x(1)$; $k_2 = x(2) - x(1)$; ... $k_N = 1 - x(N-1)$. Отметим, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = 1$.

Запишем отношение z -преобразований

$$\frac{M(z)}{U(z)} = Q(z) = K_0(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}),$$

где $K_0 = m(0)$; $K_0 b_1 = m(1) - m(0)$; ... $K_0 b_{N-1} = m(N-1) -$

$-m(N-2)$. $K_0 b_N = m(N) - m(N-1)$ при статических и $K_0 b_N = -m(N-1)$ при астатических объектах регулирования. Отметим, что $K_0(b_0 + b_1 + \dots + b_N) = m(N)$ при статических и $K_0(1 + b_1 + \dots + b_N) = 0$ при астатических объектах регулирования.

Теперь дискретную передаточную функцию объекта можно записать в виде

$$HG(z) = \frac{X(z)}{M(z)} = \frac{K_0(z)}{Q(z)} = \frac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} + \dots + k_N z^{-N}}{K_0(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N})}, \quad (1.73)$$

а передаточную функцию цифрового регулятора в виде

$$W(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{K_3(z)}{1 - K_3(z)} = \frac{Q(z)}{1 - K_3(z)} = \frac{K_0(1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N})}{1 - k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2} - \dots - k_N z^{-N}}. \quad (1.74)$$

Сравнив правые части выражений (1.72) и (1.73), находим параметры передаточной функции $W(z)$ цифрового регулятора (1.74) через параметры дискретной передаточной функции $HG(z)$ объекта регулирования с фиксатором нулевого порядка:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= d_1; \quad b_2 = d_2; \quad \dots; \quad b_N = d_N; \\ k_1 &= c_1 K_0; \quad k_2 = c_2 K_0; \quad \dots; \quad k_N = c_N K_0; \\ K_0 &= \frac{1}{c_1 + c_2 + \dots + c_N} = m(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

z -изображение управляющего воздействия на входе объекта регулирования (перед фиксатором нулевого порядка) определяется как

$$M(z) = Q(z)U(z) = \frac{K_0}{1 - z^{-1}}(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}).$$

Для астатических объектов правую часть этого выражения можно представить в виде

$$M(z) = K_0(1 + b'_1 z^{-1} + b'_2 z^{-2} + \dots + b'_{N-1} z^{-N+1}),$$

где $K_0 b'_1 = m(1)$; $K_0 b'_2 = m(2)$; \dots ; $K_0 b'_{N-1} = m(N-1)$.

Коэффициенты b_i и b'_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} b_1 &= b'_1 - 1; \quad b_2 = b'_2 - b'_1; \quad \dots \\ \dots; \quad b_{N-1} &= b'_{N-1} - b'_{N-2}; \quad b_N = -b'_{N-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему рис. 1.1, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией

$$G(s) = \alpha[(s+a)(s+b)]^{-1}. \text{ По формулам (1.54) находим } D_{01} = \frac{\alpha}{ab};$$

$$D_1 = \frac{\alpha}{a(a-b)}; \quad D_2 = -\frac{\alpha}{b(a-b)}; \quad D_1 + D_2 = -D_{01}.$$

По формуле (1.55), в которой $A_1 = A = e^{-ah}$ и $A_2 = B = e^{-bh}$, определяем

$$HG(z) = D_{01} + (1 - z^{-1}) \frac{D_1(1 - Bz^{-1}) + D_2(1 - Az^{-1})}{1 - (A+B)z^{-1} + ABz^{-2}} =$$

$$= \frac{c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}},$$

где $c_1 = -[D_{01}(A+B) + D_1 + D_2 + D_1 B + D_2 A]$;
 $c_2 = D_{01} AB + D_1 B + D_2 A$; $d_1 = -(A+B)$; $d_2 = AB$.

По выражениям (1.75) находим

$$K_0 = \frac{1}{c_1 + c_2} = \frac{1}{D_{01}[1 - (A+B) + AB]} =$$

$$= \frac{1}{\alpha[1 - (A+B) + AB]};$$

$$b_1 = d_1 = -(A+B); \quad k_1 = K_0 c_1 =$$

$$= K_0 \frac{\alpha}{ab} \left[1 - (A+B) + \frac{aA + bB}{a-b} \right];$$

$$b_2 = d_2 = AB; \quad k_2 = K_0 c_2 = K_0 \frac{\alpha}{ab} \left(AB - \frac{aA - bB}{a-b} \right);$$

$$1 - k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1}),$$

где $a_1 = \frac{bB - aA + (a-b)AB}{(a-b)[1 - (A+B) + AB]}$.

Полученная по формуле (1.74) передаточная функция цифрового регулятора совпадает с табличной (см. табл. 1.1, п. 3).

1.5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ВХОДНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Определение передаточных функций $W(z)$ оптимальных цифровых регуляторов при линейно изменяющемся воздействии на входе систем (см. рис. 1.1, а) с астатическими объектами регулирования выполняется аналогично нахождению этих функций при ступенчатом входном воздействии [26]. При этом целесообразно находить вначале оптимальные управляющие воздействия на входе объектов регулирования, затем — дискретные значения ошибки и определять передаточную функцию $W(z)$ по формуле (1.70).

Рассмотрим систему (см. рис. 1.2, а), на вход которой поступает линейно изменяющееся входное воздействие u_1 вида $u(t) = U + \alpha t$ при нулевых начальных условиях. На вход объекта регулирования поступает управляющее воздействие $m(t) \equiv u_1'(t)$, постоянное на шаге квантования h и изменяющееся скачком от $u_1'(vh)$ до $u_1'(v'h)$ в дискретные моменты времени $t = vh^+$.

Записывая уравнения объекта в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$, где $v^T = [x_1, x_2, u_2]$, определяем дискретную матрицу перехода для объекта регулирования в виде

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & Q & \alpha P \\ 0 & B & \alpha Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты B , Q и P можно определить по формулам (1.3). Обозначим $u'_v(vh^+) = m_v$, $v = 0, 1, 2, \dots$. Далее последовательно находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T(0^+) &= [0; 0; m_0]; \quad \mathbf{v}^T(h^+) = [\alpha P m_0; \alpha Q m_0; m_1]; \\ v(2h^+) &= \begin{bmatrix} \alpha P m_0 + \alpha Q^2 m_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha Q B m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в установившемся режиме при $t \gg 2h$ значения выходной координаты объекта регулирования и ее производной должны повторять входное воздействие и его производную, т. е. $x_1 = u_1 = U + \sigma t$ и $\dot{x}_1 = \dot{u}_1 = \sigma$, определяем оптимальные управляющие воздействия на входе объекта из условий

$$\begin{cases} x_1(2h^+) = \alpha P m_0 + \alpha Q^2 m_0 + \alpha P m_1 = U + 2h\sigma; \\ x_2(2h^+) = \alpha Q B m_0 + \alpha Q m_1 = \sigma. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\begin{aligned} m_1 &= -B m_0 + \frac{1}{\alpha Q} \sigma; \\ m_0 &= \frac{U}{\alpha(P + Q^2 - BP)} + \frac{2hQ - P}{\alpha Q(P + Q^2 - BP)} \sigma = \frac{U}{\alpha h Q} + \\ &+ \frac{1}{\alpha h Q} \left(2h - \frac{P}{Q} \right) \sigma. \end{aligned}$$

С учетом принятых для элементов дискретной матрицы перехода обозначений окончательно находим

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{bU}{\alpha h(1-B)} + \frac{1 + bh - (1 + 2bh)B}{\alpha h(1-B)^2} \sigma; \\ m_1 &= -\frac{bBU}{\alpha h(1-B)} + \frac{bh - (1 + 2bh)(1-B)B}{\alpha h(1-B)^2} \sigma; \\ m_v &= b\sigma/\alpha \text{ при } v \geq 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

Таким образом, определены выходные дискреты цифрового регулятора. Вычислим входные дискреты

$$\begin{aligned} \Theta(0^+) &= u_2(0^+) = U - x_1(0^+) = U; \\ \Theta(h^+) &= u_2(h^+) = U + h\sigma - x_1(h^+) = U + h\sigma - \alpha P m_0 = \\ &= \frac{1 - (1 + bh)B}{bh(1-B)} U + \frac{[1 - (1 + bh)B]^2}{b^2 h(1-B)^2} \sigma; \\ \Theta(2h^+) &= u_2(2h^+) = U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(z) &= \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2(z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-v} + \dots)}{\Theta(0^+) + \Theta(h^+) z^{-1}} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1})}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1 = \frac{b}{\alpha} \sigma - m_1$; $a_1 = \Theta(h^+)$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $\tau = t$, определяются вектором

$$\mathbf{v}^T(\tau) = [\alpha P(\tau) m_0; \alpha Q(\tau) m_0; m_0], \quad (1.79)$$

где $P(\tau) = \frac{1}{b^2} [b\tau - 1 + B(\tau)]$; $Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]$; $B(\tau) = e^{-b\tau}$.

Переходные процессы в интервале $0^+ < \tau < h$, $h^+ < t < 2h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [P + QQ(\tau)] m_0 + \alpha P(\tau) m_1 \\ \alpha QB(\tau) m_0 + \alpha Q(\tau) m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}. \quad (1.80)$$

Пусть объект регулирования в системе на рис. 1.2, а имеет параметры $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. На вход системы поступает входное воздействие $u(t) = 1 + 2t$, т. е. $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$. По формулам (1.76)–(1.78)

$$W(z) = \frac{14,3066 - 23,8131z^{-1} + 9,9066z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,5301z^{-1})}.$$

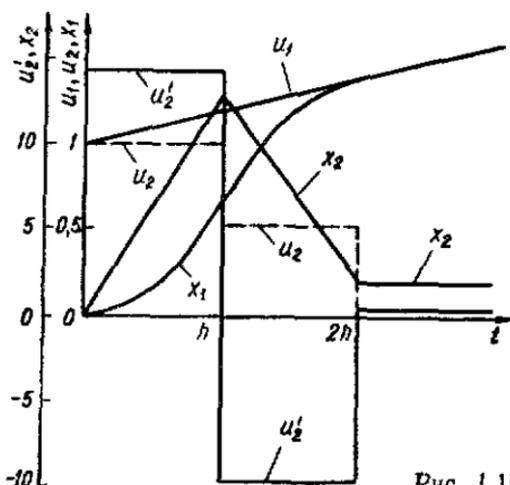


Рис. 1.15

Переходные процессы в системе на рис. 1.2, а, рассчитанные при заданных параметрах объекта регулирования и цифрового регулятора по формулам (1.79) – (1.80), показаны на рис. 1.15.

Определим передаточную функцию $W(z)$ оптимального цифрового регулятора для системы на рис. 1, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^2$, при поступлении на вход системы воздействия $u(t) = U + \sigma t$. Эта передаточная функция имеет вид

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{U + a_1 z^{-1}}, \quad (1.81)$$

где $b_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma$; $b_1 = -\frac{U}{\alpha h^2} - \frac{1}{2\alpha h} \sigma$; $a_1 = \frac{U}{2} + \frac{h}{4} \sigma$.

Переходные процессы в интервале $0^+ < \tau < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = \left[\frac{1}{2} \alpha \tau^2 b_0; \alpha \tau b_0; b_0 \right].$$

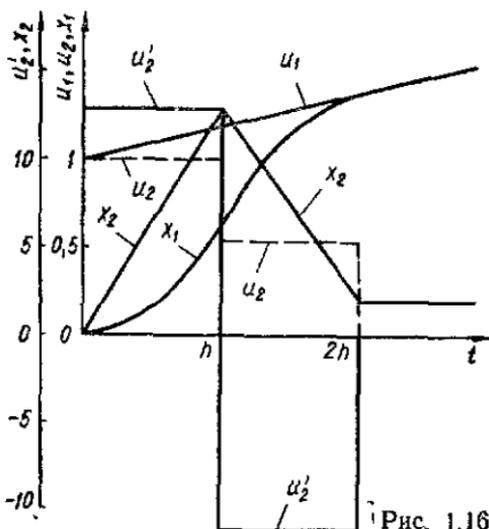
Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau \leq h$, $h^+ \leq t \leq 2h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \alpha h^2 b_0 + \alpha h \tau b_0 + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 b_1 \\ \alpha h b_0 + \alpha \tau b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Пусть объект регулирования имеет параметр $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$. На вход системы (см. рис. 1.1, а) поступает входное воздействие $u(t) = 1 + 2t$, т. е. $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формуле (1.81)

$$W(z) = \frac{13 - 11z^{-1}}{1 + 0,55z^{-1}},$$

где $b_0 = 10 + 1,5\sigma$; $b_1 = -10 - 0,5\sigma$; $a_1 = 0,5 + 0,025\sigma$.



Переходные процессы в системе из рис. 1.1, а, рассчитанные при заданных параметрах объекта регулирования и цифрового регулятора, показаны на рис. 1.16.

Передаточная функция $W(z)$ оптимального цифрового регулятора для системы на рис. 1.1, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^3$, при поступлении на вход системы воздействия $u(t) = U + \sigma t$ имеет вид

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (1.82)$$

где $b_0 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{2}{\alpha h^2} \sigma$, $b_1 = -\frac{2U}{\alpha h^3} - \frac{3}{\alpha h^2} \sigma$; $b_2 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{1}{\alpha h^2} \sigma$;
 $a_1 = \frac{5U}{6} + \frac{2h}{3} \sigma$; $a_2 = \frac{U}{6} + \frac{h}{6} \sigma$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau \leq h$, $t = \tau$ определяются вектором

$$v^T(\tau) = \left[\frac{1}{6} \alpha \tau^3 b_0; \frac{1}{2} \alpha \tau^2 b_0; \alpha \tau b_0; b_0 \right]. \quad (1.83)$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau \leq h$, $h^+ \leq t \leq 2h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \alpha h^3 b_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 \tau b_0 + \frac{1}{2} \alpha h \tau^2 b_0 + \frac{1}{6} \alpha \tau^3 b_1 \\ \frac{1}{2} \alpha h^2 b_0 + \alpha h \tau b_0 + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 b_1 \\ \alpha h b_0 + \alpha \tau b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (1.84)$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau \leq h$, $2h^+ \leq t \leq 3h$, $t = \tau + 2h$ определяются вектором

$$v(t) = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \alpha h^3 b_0 + \frac{1}{6} \alpha h^3 b_1 + \frac{3}{2} \alpha h^2 \tau b_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 \tau b_1 + \\ + \frac{1}{2} \alpha h \tau^2 b_0 + \frac{1}{2} \alpha h \tau^2 b_1 + \frac{1}{6} \alpha \tau^3 b_2 \\ \frac{3}{2} \alpha h^2 b_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 b_1 + \alpha h \tau b_0 + \alpha h \tau b_1 + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 b_2 \\ \alpha h b_0 + \alpha h b_1 + \alpha \tau b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

Пусть объект регулирования имеет параметр $\alpha = 100 \text{ с}^{-3}$. На вход системы (см. рис. 1.1, а) поступает входное воздействие $u(t) = 1 + 2t$, т. е. $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формуле (1.82)

$$W(z) = \frac{14 - 26z^{-1} + 12z^{-2}}{1 + 0,9666z^{-1} + 0,2z^{-2}},$$

где $b_0 = 10 + 2\sigma$; $b_1 = -20 - 3\sigma$; $b_2 = 10 + \sigma$; $a_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{15}\sigma$;
 $a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{60}\sigma$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а, рассчитанные при заданных параметрах объекта регулирования и цифрового регулятора по формулам (1.83) — (1.85), показаны на рис. 1.17.

Рассмотрим систему на рис. 1.1, а, в которой математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)]^{-1}$. Схема аналогового моделирования для объекта изображена на рис. 1.6, а. Дискретная матрица перехода для объекта имеет вид

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & M & P & \alpha L \\ 0 & A & W & \alpha P \\ 0 & 0 & B & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы определяются выражениями (1.9), (1.21). Оптимальные переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с таким объектом регулирования при ступенчатом входном воздействии исследованы ранее (см. формулы (1.21) — (1.26), (1.40), (1.41)). Некоторые результаты этих исследований используем ниже.

При поступлении на вход системы на рис. 1.1, а с рассматриваемым объектом регулирования линейно изменяющегося воздействия $u(t) = U + \sigma t$ при нулевых начальных условиях можно организовать переходный процесс без перерегулирования выходной координаты за минимальное время, равное $3h$, если выполнить совместно три условия:

$$\begin{aligned} x_1(3h) &= \alpha(L + MP + PQ + AMP + MWQ + BQP)m_0 + \\ &\quad + \alpha(L + PM + QP)m_1 + \alpha Lm_2 = U + 3h\sigma; \\ x_2(3h) &= \alpha(A^2P + AWQ + BWQ)m_0 + \alpha(AP + QW)m_1 + \\ &\quad + \alpha Pm_2 = \sigma; \\ x_3(3h) &= \alpha Q(B^2m_0 + Bm_1 + m_2) = \alpha\sigma. \end{aligned} \quad (1.86)$$

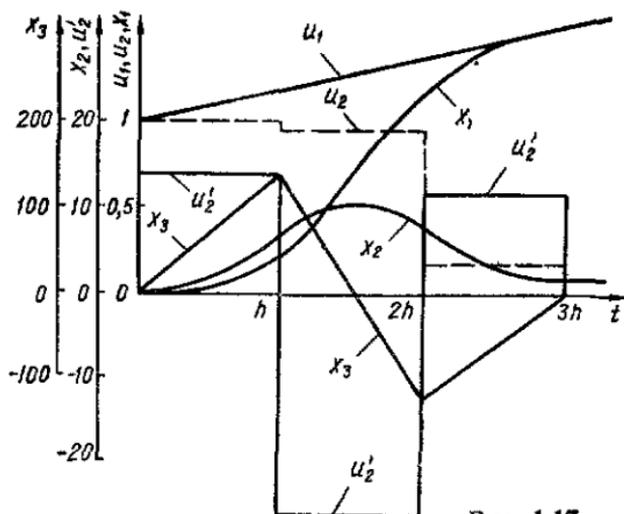


Рис. 1.17

Записанные уравнения отличаются от уравнений (1.40) правыми частями, что приводит к более сложным математическим выкладкам при решении системы уравнений (1.86). Умножив второе уравнение на Q , а третье уравнение на P и вычитая из второго уравнения третье, после несложных преобразований находим следующее соотношение:

$$m_1 = -(A + B)m_0 + \frac{Q - \alpha P}{\alpha Q (AP + QW - BP)} \sigma.$$

Используя выражения (1.9) и (1.21) для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, получаем

$$m_1 = -(A + B)m_0 + \frac{ab}{\alpha(1 - A)(1 - B)} \sigma. \quad (1.87)$$

Умножив второе уравнение на BQ , а третье уравнение — на $(AP + QW)$ и вычитая из второго уравнения третье, после несложных преобразований имеем

$$m_2 = ABm_0 + \frac{a(AP + QW) - BQ}{\alpha Q (AP + QW - BP)} \sigma.$$

Используя выражения для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, определяем

$$m_2 = ABm_0 + \frac{ab(1-A-B)}{\alpha(1-A)(1-B)}\sigma. \quad (1.88)$$

Подставляя значения m_1 и m_2 из формул (1.87) и (1.88) в первое уравнение системы уравнений (1.86) и используя выражения для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, решаем это уравнение относительно неизвестного m_0

$$m_0 = \frac{ab}{\alpha h(1-A)(1-B)} \left[U + \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} \right) \sigma \right]. \quad (1.89)$$

Подставляя выражение для величины m_0 в формулы (1.87) и (1.88), находим

$$m_1 = -\frac{ab(A+B)}{\alpha h(1-A)(1-B)} \left[U + \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{A+B} + \frac{a+b}{ab} \right) \sigma \right]; \quad (1.90)$$

$$m_2 = \frac{abAB}{\alpha h(1-A)(1-B)} \left[U + \left(3h - \frac{h}{A} - \frac{h}{B} + \frac{h}{AB} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} \right) \sigma \right]. \quad (1.91)$$

В установившемся режиме

$$m_v = \frac{ab}{\alpha} \sigma \text{ при } v \geq 3. \quad (1.92)$$

Таким образом, оптимальный цифровой регулятор при линейно изменяющемся входном воздействии должен формировать управляющие воздействия на входе объекта регулирования в переходном режиме $m_0 = u_2(0^+)$; $m_1 = u_2(h^+)$; $m_2 = u_2(2h^+)$, которые определяются выражениями (1.89) — (1.91), и в установившемся режиме — управляющие воздействия, которые определяются выражением (1.92) и образуют постоянную величину на входе объекта.

Найдем последовательность импульсов на входе цифрового регулятора:

$$u_2(0^+) = U - x_1(0^+) = U;$$

$$u_2(h^+) = U + h\sigma - x_1(h^+) = U + h\sigma - \alpha L m_0 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2 b^2} \times \left[abh - (a+b) + \frac{b^2 A - a^2 B}{b-a} \right] m_0; \quad (1.93)$$

$$u_2(2h^+) = U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = U + 2h\sigma - \alpha \{ (L + PM + PQ) m_0 + L m_1 \} = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2 b^2} \left\{ \left[abh + \frac{b^2 A (1-A) - a^2 B (1-B)}{a-b} \right] m_0 + \left[abh - (a+b) + \frac{a^2 B - b^2 A}{a-b} \right] m_1 \right\}. \quad (1.94)$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора

$$W(z) = \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + m_3 (z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-v} + \dots)}{u_2(0^+) + u_2(h^+) z^{-1} + u_2(2h^+) z^{-2}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}, \quad (1.95)$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{ab}{\alpha} - m_2$; $a_1 = u_2(h^+)$; $a_2 = u_2(2h^+)$.

Определим переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с рассмотренным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, обеспечивающим минимальное время регулирования, равное $3h$, без перерегулирования выходной координаты $x(t)$ при линейно-изменяющемся входном воздействии $u(t) = U + \sigma t$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t \leq h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [x_1; x_2; x_3; m] = [\alpha L(\tau) m_0; \alpha P(\tau) m_0; \alpha Q(\tau) m_0; m_0], \quad (1.96)$$

где $L(\tau) = \frac{1}{a^2 b^2} \left[ab\tau - (a+b) + \frac{b^2 A(\tau) - a^2 B(\tau)}{b-a} \right]$; $P(\tau) = \frac{1}{ab} \times$
 $\times \left[1 + \frac{bA(\tau) - aB(\tau)}{a-b} \right]$; $Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]$; $A(\tau) = e^{-a\tau}$;
 $B(\tau) = e^{-b\tau}$.

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t \leq 2h$, $0^+ \leq \tau \leq h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [L + PM(\tau) + QP(\tau)] m_0 + \alpha L(\tau) m_1 \\ \alpha [PA(\tau) + QW(\tau)] m_0 + \alpha P(\tau) m_1 \\ \alpha QB(\tau) m_0 + \alpha Q(\tau) m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}, \quad (1.97)$$

где $M(\tau) = \frac{1}{a} [1 - A(\tau)]$; $W(\tau) = \frac{1}{a-b} [B(\tau) - A(\tau)]$.

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t \leq 3h$, $0^+ \leq \tau \leq h$, $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha (L + PM + QP) m_0 + \alpha L m_1 + \alpha [(AP + \\ + QW) m_0 + P m_1] M(\tau) + \alpha (BQ m_0 + \\ + Q m_1) P(\tau) + \alpha L(\tau) m_2 \\ \alpha [(AP + QW) m_0 + P m_1] A(\tau) + \\ + \alpha (BQ m_0 + Q m_1) W(\tau) + \alpha P(\tau) m_2 \\ \alpha (BQ m_0 + Q m_1) B(\tau) + \alpha Q(\tau) m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (1.98)$$

Рассмотрим пример. Пусть параметры объекта регулирования $\alpha = 800 \text{ с}^{-3}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$; $a = 20 \text{ с}^{-1}$. На вход системы на рис. 1.1, а поступает воздействие $u(t) = U + \sigma t$, где $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.89) — (1.95):

$$W(z) = \frac{4,35559 - 7,87309z^{-1} + 4,02943z^{-2} - 0,41193z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+0,84297z^{-1}+0,10292z^{-2})}.$$

Оптимальный цифровой регулятор формирует на выходе в переходном режиме последовательность мгновенных импульсов,

площади которых соответственно равны $m_0 = m(0^+)$; $m_1 = m(h^+)$; $m_2 = m(2h^+)$, и в установившемся режиме — бесконечную последовательность мгновенных импульсов, площади которых равны $m_v = m(vh^+)$ при $v \geq 3$. На входе объекта регулятора (после фиксатора нулевого порядка) цифровой регулятор формирует управляющие воздействия в виде импульсов длительностью h , амплитуды которых равны $m_0 = u'_2(0^+)$; $m_1 = u'_2(h^+)$; $m_2 = u'_2(2h^+)$ и $m_v = u'_2(vh^+)$ при $v \geq 3$. Для заданных параметров объекта регулирования и шага квантования получаем следующие значения: $m_0 = 3,19005U + 0,58277\sigma$; $m_1 = -3,04352U - 0,23699\sigma$; $m_2 = 0,35347U + 0,07923\sigma$; $m_v = 0,05\sigma$, где $U = 1$ и $\sigma = 2c^{-1}$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором при входном воздействии $u(t) = 1 + 2t$ и нулевых начальных условиях, рассчитанные по формулам (1.96) — (1.98), изображены на рис. 1.18.

Рассмотрим систему на рис. 1.1, а, в которой математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s^2(s+b)]^{-1}$. Объект регулирования имеет астатизм 2-го порядка. Схема аналогового моделирования для объекта изображена на рис. 1.7, а. Дискретная матрица перехода для объекта имеет вид

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & hP & \alpha L \\ 0 & 1 & Q\alpha P \\ 0 & 1 & B\alpha Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы определяются выражениями (1.3) и (1.27).

При поступлении на вход системы (см. рис. 1.1, а) с рассматриваемым объектом регулирования линейно изменяющегося воздействия $u(t) = U + \sigma t$ при нулевых начальных условиях можно организовать переходной процесс без перерегулирования выходной координаты за минимальное время, равное $3h$, если выполнить совместно три условия:

$$\left. \begin{aligned} x_1(3h) &= \alpha(L + 2hP + QP + hQ^2 + BPQ)m_0 + \alpha(L + hP + \\ &\quad + QP)m_1 + \alpha L m_2 = U + 3h\sigma; \\ x_2(3h) &= \alpha(P + Q^2 + BQ^2)m_0 + \alpha(P + Q^2)m_1 + \alpha P m_2 = \sigma; \\ x_3(3h) &= \alpha Q(B^2 m_0 + B m_1 + m_2) = 0. \end{aligned} \right\} (1.99)$$

Умножая второе уравнение на Q , а третье уравнение — на P и вычитая из второго уравнения третье, после несложных преобразований находим следующее соотношение:

$$m_1 = -(1+B)m_0 + \frac{1}{\alpha(P+Q^2-BP)}\sigma.$$

Используя выражения для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, получаем

$$m_1 = -(1+B)m_0 + \frac{b}{\alpha h(1-B)}\sigma. \quad (1.100)$$

Умножая второе уравнение на BQ , а третье уравнение — на $(P+Q^2)$ и вычитая из второго уравнения третье, после несложных преобразований имеем

$$m_2 = Bm_0 - \frac{B}{\alpha(P+Q^2-BP)}\sigma.$$

Используя выражения для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, получаем

$$m_2 = Bm_0 - \frac{bB}{\alpha h(1-B)} \sigma. \quad (1.101)$$

Подставляя значения m_1 и m_2 из формул (1.100) и (1.101) в первое уравнение системы уравнений (1.99) и используя выражения для элементов дискретной матрицы перехода $\Phi(h)$, решаем это уравнение относительно неизвестного m_0 :

$$m_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} \right) \sigma \right]. \quad (1.102)$$

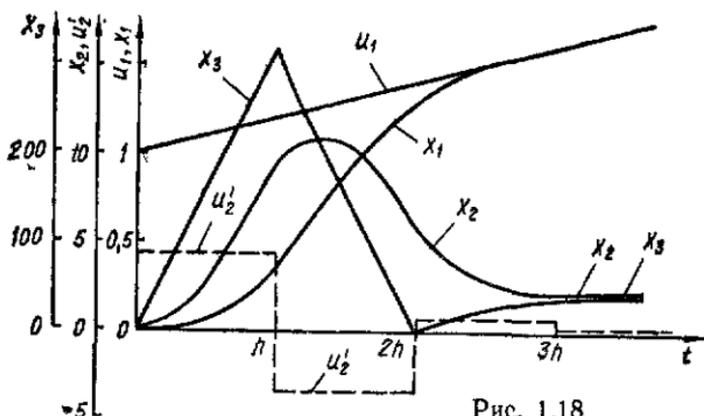


Рис. 1.18

Подставляя выражение для величины m_0 в формулы (1.100) и (1.101), находим

$$m_1 = - \frac{b(1+B)}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} - \frac{h}{1+B} \right) \sigma \right]; \quad (1.103)$$

$$m_2 = \frac{bB}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{3h}{2} \right) \sigma \right]. \quad (1.104)$$

Таким образом, оптимальный цифровой регулятор при линейно изменяющемся воздействии $u(t) = U + \sigma t$ на входе системы рис. 1.1, а должен формировать управляющие воздействия на входе объекта регулирования в виде импульсов длительностью h с амплитудами $m_0 = u_2'(0^+)$; $m_1 = u_2'(h^+)$ и $m_2 = u_2'(2h^+)$, которые определяются выражениями (1.102) — (1.104).

Определим площади $\Theta(vh^+)$ мгновенных импульсов на входе цифрового регулятора в системе на рис. 1.1, а (амплитуды $u_2(vh^+)$ сомкнутых между собой импульсов на входе усилителя с переменным коэффициентом усиления K_v в эквивалентной системе на рис. 1.1, б):

$$\left. \begin{aligned} \Theta(0^+) &= u_2(0^+) = U - x_1(0^+) = U; \\ \Theta(h^+) &= u_2(h^+) = U + h\sigma - x_1(h^+) = U + h\sigma - \\ &- \alpha L m_0 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{b^2} \left(\frac{b^2 h^2}{2} - bh + 1 - B \right) m_0; \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

$$\Theta(2h^+) = u_2(2h^+) = U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = U + 2h\sigma - \alpha(L + hP + QP)m_0 - \alpha L m_1 = U + 2h\sigma - \quad (1.106)$$

$$- \frac{\alpha}{2b^2} \{ [3b^2h^2 - 2(bh - B + B^2)]m_0 + [b^2h^2 - 2(bh - 1 + B)]m_1 \}.$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (1.107)$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $a_1 = u_2(h^+)$; $a_2 = u_2(2h^+)$.

Определим переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с рассмотренным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором, обеспечивающим минимальное время регулирования, равное $3h$, без перерегулирования выходной координаты $x(t)$ при линейно изменяющемся входном воздействии $u(t) = U + \sigma t$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = [x_1; x_2; x_3; m] = [\alpha L(\tau)m_0; \alpha P(\tau)m_0; \alpha Q(\tau)m_0; m_0], \quad (1.108)$$

$$\text{где } L(\tau) = \frac{1}{b^2} \left[\frac{b^2 \tau^2}{2} - b\tau + 1 - B(\tau) \right]; \quad P(\tau) = \frac{1}{b^2} [bh - 1 + B(\tau)];$$

$$Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]; \quad B(\tau) = e^{-b\tau}.$$

Переходные процессы в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [L + \tau P + QP(\tau)]m_0 + \alpha L(\tau)m_1 \\ \alpha [P + QQ(\tau)]m_0 + \alpha P(\tau)m_1 \\ \alpha QB(\tau)m_0 + \alpha Q(\tau)m_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Переходные процессы в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + 2h$, определяются вектором

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [L + hP + QP + (P + Q^2)\tau + BQP(\tau)]m_0 + \\ + \alpha [L + \tau P + QP(\tau)]m_1 + \alpha L(\tau)m_2 \\ \alpha [P + Q^2 + BQQ(\tau)]m_0 + \alpha [P + \\ + QQ(\tau)]m_1 + \alpha P m_2 \\ \alpha [QBB(\tau)m_0 + QB(\tau)m_1 + Q(\tau)m_2] \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Рассмотрим пример. Пусть параметры объекта регулирования $\alpha = 800 \text{ с}^{-2}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. На вход системы (см. рис. 1.1, а) поступает воздействие $u(t) = U + \sigma t$, где $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.102) — (1.107)

$$W(z) = \frac{1,92624 - 3,22717z^{-1} + 1,35124z^{-2}}{1 + 0,95513z^{-1} + 0,18955z^{-2}}.$$

Оптимальный цифровой регулятор формирует на своем выходе три мгновенных импульса, площади которых соответственно равны $m_0 = m(0^+)$, $m_1 = m(h^+)$, $m_2 = m(2h^+)$. На входе объекта регулирования (после фиксатора нулевого порядка) цифровой регулятор формирует управляющее воздействие в виде импульсов длительностью h каждый с амплитудами $m_0 = u_2(0^+)$, $m_1 =$

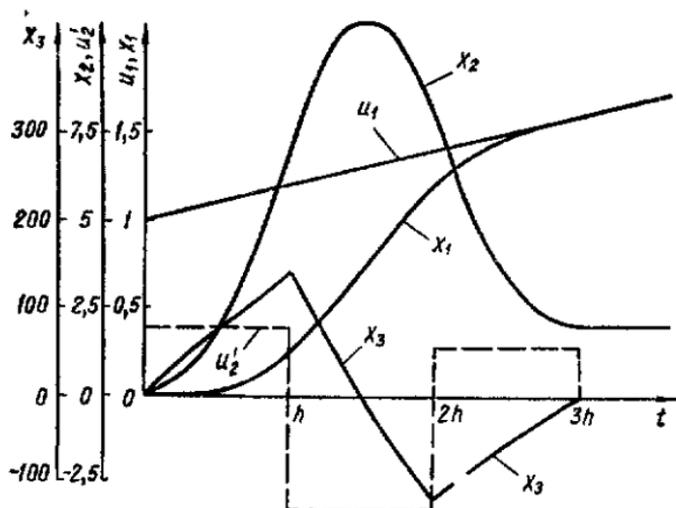


Рис. 1.19

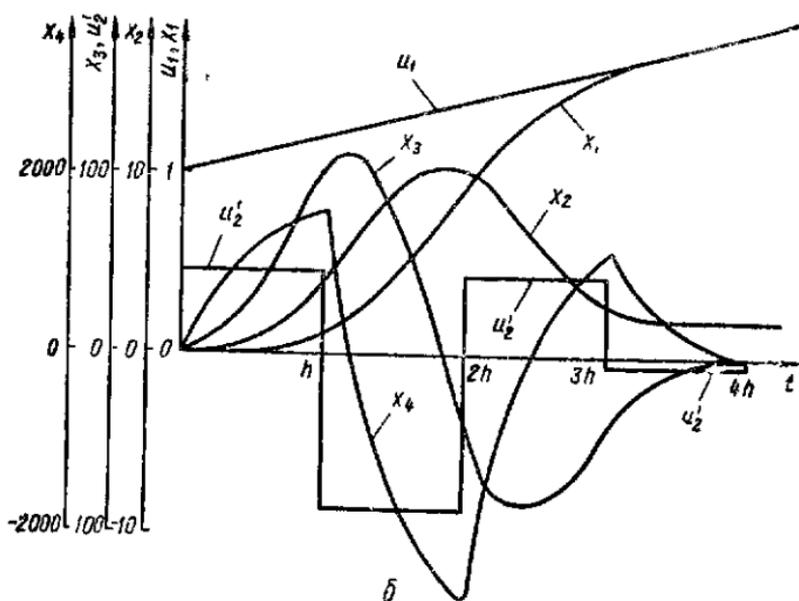
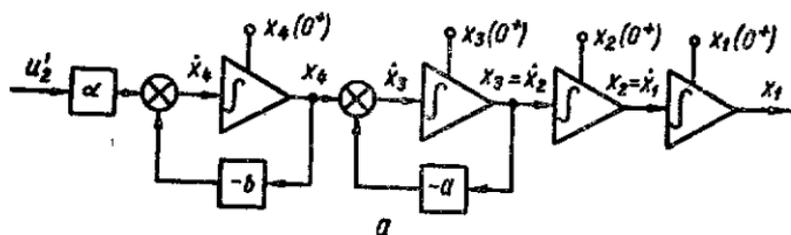


Рис. 1.20

$= u_2'(h^+)$, $m_3 = u_2'(2h^+)$. Для заданных параметров объекта регулирования и шага квантования получаем следующие значения: $m_0 = 1,37916U + 0,27354\sigma$; $m_1 = -2,50833U - 0,35957\sigma$; $m_2 = 1,12916U + 0,11104\sigma$, где $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором при входном воздействии $u(t) = 1 + 2t$ и нулевых начальных условиях, рассчитанные по формулам (1.108) — (1.110), изображены на рис. 1.19.

Рассмотрим систему на рис. 1.1, а с объектом регулирования четвертого порядка, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s^2(s+a)(s+b)]^{-1}$. Объект регулирования имеет астатизм второго порядка. Схема аналогового моделирования для объекта изображена на рис. 1.20, а. Дискретная матрица перехода для объекта имеет вид

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & hS & L & \alpha G \\ 0 & 1 & M & P \\ 0 & 0 & A & W \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $S = \frac{1}{a^2}(ah - 1 + A)$; $G = \frac{h^2}{2ab} - \frac{(a+b)h}{a^2b^2} + \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3b^3} + \frac{1}{a-b} \left(\frac{A}{a^3} - \frac{B}{b^3} \right)$,

а остальные элементы матрицы перехода определяются по формулам (1.9) и (1.21).

На вход системы на рис. 1.1, а с рассматриваемым объектом регулирования поступает линейно-изменяющееся воздействие $u(t) = U + \sigma t$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях. Определим передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего оптимальный переходный процесс $x(t)$.

Обозначим $u_2'(vh^+) = m_v$, $v = 0, 1, 2, \dots$ и найдем значения вектора $v^T = \{x_1; x_2; x_3; x_4; m\}$ в дискретные моменты времени:

$$v^T(0^+) = \{0; 0; 0; 0; m_0\};$$

$$v^T(h^+) = \{\alpha G m_0; \alpha L m_0; \alpha P m_0; \alpha Q m_0; m_1\};$$

$$v(2h^+) = \begin{bmatrix} \alpha(G + hL + PS + QL)m_0 + \alpha G m_1 \\ \alpha(L + PM + QP)m_0 + \alpha L m_1 \\ \alpha(AP + QW)m_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha B Q m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{bmatrix};$$

$$v(3h^+) = \{C'; D'; E'; F'; m_3\},$$

где

$$C' = \alpha[G + hL + PS + QL + h(L + PM + QP) + S(AP + QW) + BQL]m_0 + \alpha(G + hL + PS + QL)m_1 + \alpha G m_2; \quad D' = \alpha[L + PM + QP + M(AP + QW) + BQP]m_0 + \alpha(L + PM + QP)m_1 + \alpha L m_2; \\ E' = \alpha(A^2P + AQW + BQW)m_0 + \alpha(AP + QW)m_1 + \alpha P m_2; \quad F' = \alpha B^2 Q m_0 + \alpha B Q m_1 + \alpha Q m_2;$$

$$v(4h^+) = \begin{bmatrix} C' + hD' + SE' + LF' + \alpha G m_3 \\ D' + ME' + PF' + \alpha L m_3 \\ AE' + WF' + \alpha P m_3 \\ BF' + \alpha Q m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}.$$

Чтобы переходные процессы в объекте регулирования при нулевых начальных условиях заканчивались за время, равное $4h$, необходимо равенство вектора $v(4h^+)$ вектору $v_{\text{жк}}^* = \{U + 4h\sigma; \sigma; 0; 0; 0\}$. Составляя систему уравнений $v(4h^+) = v_{\text{жк}}^*$ и решая ее относительно неизвестных m_0, m_1, m_2 и m_3 , получаем следующие окончательные результаты

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -m_0(1 + A + B) + \frac{ab}{\alpha h(1-A)(1-B)} \sigma; \\ m_2 &= m_0(A + B + AB) - \frac{ab(A+B)}{\alpha h(1-A)(1-B)} \sigma; \\ m_3 &= -m_0 AB + \frac{ab AB}{\alpha h(1-A)(1-B)} \sigma; \end{aligned} \right\} (1.111)$$

$$m_0 = \frac{ab}{\alpha h^2(1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[4h - \frac{a+b}{ab} - \frac{5h - 3h(A+B) + hAB}{2(1-A)(1-B)} \right] \sigma \right\}. \quad (1.112)$$

Определим входные дискреты цифрового регулятора

$$\left. \begin{aligned} \Theta(0^+) &= U - x_1(0^+) = U, \\ \Theta(h^+) &= a_1 = U + h\sigma - x_1(h^+) = U + h\sigma - \alpha G m_0 = U + \\ &+ h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{(a+b)h}{ab} + \frac{a^2(1-B) - b^2(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_0; \end{aligned} \right\} (1.113)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta(2h^+) &= a_2 = U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = U + 2h\sigma - \alpha(G + hL + PS + \\ &+ QL) m_0 - \alpha G m_1 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{a^2 B(1-B) - b^2 A(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_0 + \alpha \left[\frac{h^2}{2} - \frac{(a+b)h}{ab} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{a^2(1-B) - b^2(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_1 \right\}; \end{aligned} \right\} (1.114)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta(3h^+) &= a_3 = U + 3h\sigma - x_1(3h^+) = U + 3h\sigma - C' = \\ &= U + 3h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{5h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^2 B^2(1-B) - b^2 A^2(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_0 + \right. \\ &+ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^2 B(1-B) - b^2 A(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_1 + \\ &+ \left. \left[\frac{h^2}{2} - \frac{(a+b)h}{ab} + \frac{a^2(1-B) - b^2(1-A)}{a^2 b^2 (a-b)} \right] m_2 \right\}. \end{aligned} \right\} (1.115)$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора (см. табл. 1.4, п. 9)

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}, \quad (1.116)$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $b_3 = m_3$.

Оптимальные переходные процессы в интервале $0^+ < t < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$v^T(\tau) = \left\{ \alpha G(\tau) m_0; \alpha L(\tau) m_0; \alpha P(\tau) m_0; \alpha Q(\tau) m_0; m_0 \right\}, \quad (1.117)$$

где $G(\tau) = \frac{\tau^2}{2ab} - \frac{(a+b)\tau}{a^2b^2} + \frac{a^2+ab+b^2}{a^3b^3} + \frac{1}{a-b} \left[\frac{A(\tau)}{a^3} - \frac{B(\tau)}{b^3} \right]$;
 $L(\tau) = \frac{1}{a^2b^2} \left[ab\tau - (a+b) + \frac{b^2A(\tau) - a^2B(\tau)}{b-a} \right]$; $P(\tau) = \frac{1}{ab} \left[1 + \frac{bA(\tau) - aB(\tau)}{a-b} \right]$; $Q(\tau) = \frac{1}{b} [1 - B(\tau)]$; $A(\tau) = e^{-a\tau}$; $B(\tau) = e^{-b\tau}$; в интервале $h^+ \leq t < 2h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + h$, — вектором

$$\vartheta(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha [G + \tau L + PS(\tau) + QL(\tau)] m_0 + \alpha G(\tau) m_1 \\ \alpha [L + PM(\tau) + QP(\tau)] m_0 + \alpha L(\tau) m_1 \\ \alpha [PA(\tau) + QW(\tau)] m_0 + \alpha P(\tau) m_1 \\ \alpha QB(\tau) m_0 + \alpha Q(\tau) m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}, \quad (1.118)$$

где $S(\tau) = \frac{1}{a^2} [a\tau - 1 + A(\tau)]$; $M(\tau) = \frac{1}{a} [1 - A(\tau)]$; $W(\tau) = \frac{A(\tau) - B(\tau)}{b-a}$; в интервале $2h^+ \leq t < 3h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + 2h$, — вектором

$$\vartheta^{\tau}(\tau) = |C'(\tau); D'(\tau); E'(\tau); F'(\tau); m_2|, \quad (1.119)$$

где $C'(\tau) = \alpha [G + hL + PS + QL + \tau(L + PM + QP) + (AP + QW)S(\tau) + BQL(\tau)] m_0 + \alpha [G + \tau L + PS(\tau) + QL(\tau)] m_1 + \alpha G(\tau) m_2$;
 $D'(\tau) = \alpha [L + PM + QP + (AP + QW)M(\tau) + BQP(\tau)] m_0 + \alpha [L + PM(\tau) + QP(\tau)] m_1 + \alpha L(\tau) m_2$;
 $E'(\tau) = \alpha [(AP + QW)A(\tau) + BQW(\tau)] m_0 + \alpha [PA(\tau) + QW(\tau)] m_1 + \alpha P(\tau) m_2$;
 $F'(\tau) = \alpha BQB(\tau) m_0 + \alpha QB(\tau) m_1 + \alpha Q(\tau) m_2$; в интервале $3h^+ \leq t < 4h$, $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau + 3h$, — вектором

$$\vartheta(\tau) = \begin{bmatrix} C' + \tau D' + E'S(\tau) + F'L(\tau) + \alpha G(\tau) m_2 \\ D' + E'M(\tau) + F'P(\tau) + \alpha L(\tau) m_2 \\ E'A(\tau) + F'W(\tau) + \alpha P(\tau) m_2 \\ F'B(\tau) + \alpha Q(\tau) m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (1.120)$$

Рассмотрим пример. Пусть объект регулирования имеет параметры $\alpha = 800 \text{ с}^{-2}$; $a = 20 \text{ с}^{-1}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. На вход системы (см. рис. 1.1, а) поступает воздействие $u(t) = U + \sigma t$, $U = 1$, где $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$ по формулам (1.111) — (1.116)

$$W(z) = \frac{46,74596z^3 - 84,96458z^2 + 43,69128z - 4,47266z^0}{1 + 1,09492z^{-1} + 0,47590z^{-2} + 0,02451z^{-3}}.$$

Оптимальный цифровой регулятор формирует на выходе четыре мгновенных импульса, площади которых соответственно равны $m_0 = m(0^+)$; $m_1 = m(h^+)$; $m_2 = m(2h^+)$; $m_3 = m(3h^+)$. На входе объекта регулирования (после фиксатора нулевого порядка) цифровой регулятор формирует управляющее воздействие в виде сомкнутых между собой четырех импульсов длительностью h каждый с амплитудами $m_0 = u_2'(0^+)$; $m_1 = u_2'(h^+)$; $m_2 = u_2'(2h^+)$, $m_3 = u_2'(3h^+)$. Для заданных параметров объекта

регулирования и шага квантования получаем следующие значения: $m_0 = 31,90055U + 7,422705\sigma$; $m_1 = -62,33578U - 11,31440\sigma$; $m_2 = 33,96991U + 4,860687\sigma$; $m_3 = -3,53468U - 0,46899\sigma$, где $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$.

Переходные процессы в системе на рис. 11, а с указанным объектом регулирования и оптимальным цифровым регулятором при входном воздействии $u(t) = 1 + 2t$ и нулевых начальных условиях, рассчитанные по формулам (1.117) — (1.120), изображены на рис. 1.20, б.

Синтез оптимальных цифровых регуляторов при входном линейно-изменяющемся воздействии вида $u(t) = U + \sigma t$ для систем на рис. 11, а с линейными астатическими объектами регулирования второго, третьего и четвертого порядков и анализ переходных процессов при нулевых начальных условиях позволяют сделать следующие выводы.

1. Переходные процессы заканчиваются за два шага квантования мгновенного ключа (за время $2h$) для систем с объектами регулирования второго порядка, за три шага квантования мгновенного ключа (за время $3h$) для систем с объектами регулирования третьего порядка и за четыре шага квантования мгновенного ключа (за время $4h$) для систем с объектами регулирования четвертого порядка.

2. Если объект регулирования имеет астатизм второго и более высокого порядков, после окончания переходных процессов установившаяся выходная величина цифрового регулятора равна нулю ($u'_2 = 0$). Если объект регулирования имеет астатизм первого порядка, после окончания переходных процессов установившаяся выходная величина цифрового регулятора не равна нулю ($u'_2 \neq 0$).

3. Передаточные функции $W(z)$ оптимальных цифровых регуляторов для различных передаточных функций $G(s)$ объектов регулирования приведены в табл. 1.4 [20]. Коэффициенты передаточных функций цифровых регуляторов определяются параметрами объекта регулирования, шагом квантования h и скоростью (первой производной) входного воздействия σ .

1.6. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОМ ВХОДНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим систему на рис. 11, а, на вход которой поступает входное воздействие вида $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$. Такое входное воздействие имеет первую $\dot{u}(t) = \sigma + 2\lambda t$ и вторую $\ddot{u}(t) = 2\lambda$ производные. Пусть математическая модель объекта регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha / s^3$. Для такого объекта схема аналогового моделирования изображена на рис. 1.8, а. На вход объекта регулирования поступает управляющее воздействие u'_2 , постоянное в течение интервалов h и изменяющееся скачком от $u'_2(vh)$ до $u'_2(vh^+)$ в дискретные моменты времени $t = vh^+$. Начальные условия — нулевые. Определим передаточную функцию $W(z)$ (см. рис. 1.1, а) оптимального цифрового регулятора, при которой система обрабатывает входное воздействие $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$ без перерегулирования за конечное и минимальное время.

1.4. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем на рис. 1.1.а при входных воздействиях $u(t) = U + \sigma t$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
1	$\frac{\alpha}{s^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{U + a_1 z^{-1}},$ <p>где $b_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma$; $b_1 = -\frac{U}{\alpha h^2} - \frac{1}{2\alpha h} \sigma$; $a_1 = \frac{U}{2} + \frac{h}{4} \sigma$</p>
2	$\frac{\alpha}{s(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1})},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = \frac{b}{\alpha} \sigma - m_1$; $m_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)} \times$ $\times \left[U + \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) \sigma \right]$; $m_1 = -\frac{bB}{\alpha h(1-B)} \left\{ U + \left[2h + \frac{1}{b} - \right. \right.$ $\left. - \frac{h}{B(1-B)} \right] \sigma \}$; $a_1 = U + h\sigma -$ $-\frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + B) m_0$; $B = e^{-bh}$</p>
3	$\frac{\alpha}{s^3}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ <p>где $b_0 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{2}{\alpha h^2} \sigma$; $b_1 = -\frac{2U}{\alpha h^3} - \frac{3}{\alpha h^2} \sigma$; $b_2 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{1}{\alpha h^2} \sigma$; $a_1 = \frac{5}{6} U + \frac{2h}{3} \sigma$; $a_2 = \frac{1}{6} U + \frac{h}{6} \sigma$</p>
4	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $m_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \right. \right.$ $\left. - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} \right) \sigma \right]$; $m_1 = -\frac{b(1+B)}{\alpha h^2(1-B)} \times$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$\times \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} - \frac{h}{1+B} \right) \sigma \right]; m_2 = \frac{bB}{\alpha h^2 (1-B)} \left[U + \left(3h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{3h}{2} \right) \sigma \right];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{b^2} \left(\frac{b^2 h^2}{2} - bh + + 1 - B \right) m_0; a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{2b^2} \times$ $\times \{ [3b^2 h^2 - 2 \{ bh - B + B^2 \}] m_0 + + [b^2 h^2 - 2 (bh - 1 + B)] m_1 \};$ $B = e^{-bh}$
5	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0; b_2 = m_2 - m_1;$ $b_3 = \frac{ab}{\alpha} \sigma - m_2;$</p> $m_0 = \frac{ab}{\alpha h (1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h(2-A-B)}{(1-A)(1-B)} \right] \sigma \right\};$ $A = e^{-ah}; B = e^{-bh};$ $m_1 = - \frac{ab(A+B)}{\alpha h (1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h(2-A-B)}{(1-A)(1-B)} - \frac{h}{A+B} \right] \sigma \right\};$ $m_2 = \frac{abAB}{\alpha h (1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h(2-A-B)}{(1-A)(1-B)} + \frac{h(1-A-B)}{AB} \right] \sigma \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2 b^2} \left[abh - (a+b) + \frac{a^2 B - b^2 A}{a-b} \right] m_0; a_2 = U + 2h\sigma -$ $- \frac{\alpha}{a^2 b^2} \left\{ \left[abh + \frac{b^2 A (1-A)}{a-b} - \frac{a^2 B (1-B)}{a-b} \right] m_0 + \left[abh - (a+b) + \frac{a^2 B}{a-b} - \frac{b^2 A}{a-b} \right] m_1 \right\}$
6	$\frac{\alpha}{s(s+a)^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0;$</p> $b_2 = m_2 - m_1; b_3 = \frac{a^2}{\alpha} \sigma - m_2;$ $m_0 = \frac{a^2}{\alpha h (1-A)^2} \left[U + \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} \right) \sigma \right]; m_1 = - \frac{2a^2 A}{\alpha h (1-A)^2} \times$ $\times \left[U + \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} - \frac{h}{2A} \right) \sigma \right];$ $m_2 = \frac{a^2 A^2}{\alpha h (1-A)^2} \left[U + \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} + \frac{h-2hA}{A^2} \right) \sigma \right]; a_1 = U + h\sigma -$ $- \frac{\alpha}{a^4} (a^2 h - 2a + 2aA) m_0; a_2 = U +$ $+ 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^4} [(a^2 h + 2aA - 2aA^2) m_0 + (a^2 h - 2a + 2aA) m_1]; A = e^{-ah}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
7	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a}{\alpha} \sigma - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \left\{ U + \right.$ $\left. + \left[3h + b/a - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} \right] \sigma \right\};$ $B = e^{-bh}; \lambda = \sqrt{a - b^2} / 4;$ $m_1 = - \frac{2a \sqrt{B} \cos \lambda h}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \left[3h + b/a - \right. \right.$ $\left. - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} - \right.$ $\left. - \frac{h}{2\sqrt{B} \cos \lambda h} \right] \sigma \right\};$ $m_2 = \frac{aB}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \left\{ U + \right.$ $\left. + \left[3h + b/a - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} + \right. \right.$ $\left. + \frac{h(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h)}{B} \right] \sigma \right\}; a_1 = U +$ $+ h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left[ah - b + \sqrt{B} (b \cos \lambda h + \right.$ $\left. + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin \lambda h) \right] m_0; a_2 = U + 2h\sigma -$ $- \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[ah - \sqrt{B} (b \cos \lambda h + \right. \right.$ $\left. + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin \lambda h) + B (b \cos 2\lambda h + \right.$ $\left. + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin 2\lambda h) \right] m_0 + [ah - b +$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$+ \sqrt{B} \left(b \cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \operatorname{th} \lambda h \right) m_1 \}$
8	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a^2}{\alpha} \sigma - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a^2}{2\alpha h (1 - \cos ah)} (U + 2h\sigma);$ $m_1 = -\frac{a^2 \cos ah}{\alpha h (1 - \cos ah)} \left[U + \left(2h - \frac{h}{2 \cos ah} \right) \sigma \right];$ $m_2 = \frac{a^2}{2\alpha h (1 - \cos ah)} [U + (3h - 2h \cos ah) \sigma];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} (ah - \sin ah) m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} [(ah + \sin ah - \sin 2ah) m_0 + (ah - \sin ah) m_1]$
9	$\frac{\alpha}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $b_3 = m_2$;</p> $m_0 = \frac{ab}{\alpha h^2 (1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[4h + \frac{a+b}{ab} - \frac{5h-3h(A+B)+hAB}{2(1-A)(1-B)} \right] \sigma \right\};$ $A = e^{-ah}; \quad B = e^{-bh};$ $m_1 = -\frac{ab(1+A+B)}{\alpha h^2 (1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[4h + \frac{a+b}{ab} - \frac{5h-3h(A+B)+hAB}{2(1-A)(1-B)} \right] \sigma \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулярования $G(z)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$- \left. \frac{h}{1+A+B} \right] \sigma \};$ $m_2 = \frac{ab(A+B+AB)}{\alpha h^2(1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[4h + \frac{a+b}{ab} - \frac{5h-3h(A+B)+hAB}{2(1-A)(1-B)} - \frac{h(A+B)}{A+B+AB} \right] \sigma \right\};$ $m_3 = - \frac{abAB}{\alpha h^2(1-A)(1-B)} \left\{ U + \left[3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{5h-3h(A+B)+hAB}{2(1-A)(1-B)} \right] \sigma \right\};$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3(1-B) - b^3(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3B(1-B) - b^3A(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_0 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3(1-B) - b^3(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_1 \right\};$ $a_3 = U + 3h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{5h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3B^2(1-B) - b^3A^2(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_0 + \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3B(1-B) - b^3A(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_1 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h(a+b)}{ab} + \frac{a^3(1-B) - b^3(1-A)}{a^2b^2(a-b)} \right] m_2 \right\}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
10	$\frac{\alpha}{s^2 (s + a)^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1; b_2 = m_2; b_3 = m_3;$</p> $m_0 = \frac{a^2}{\alpha h^2 (1 - A)^2} \left\{ U + \left[4h + \frac{2}{a} - \frac{5h - 6hA + hA^2}{2(1 - A)^2} \right] \sigma \right\}; A = e^{-ah};$ $m_1 = -\frac{a^2(1 + 2A)}{\alpha h^2 (1 - A)^2} \left\{ U + \left[4h + \frac{2}{a} - \frac{5h - 6hA + hA^2}{2(1 - A)^2} - \frac{h}{1 + 2A} \right] \sigma \right\};$ $m_2 = \frac{aA(2 + A)}{\alpha h^2 (1 - A)^2} \left\{ U + \left[4h + \frac{2}{a} - \frac{5h - 6hA + hA^2}{2(1 - A)^2} - \frac{2h}{2 + A} \right] \sigma \right\};$ $m_3 = -\frac{a^2 A^2}{\alpha h^2 (1 - A)^2} \left\{ U + \left[3h + \frac{2}{a} - \frac{5h - 6hA + hA^2}{2(1 - A)^2} \right] \sigma \right\};$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3(1 - A)}{a^2} \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3A(1 - A)}{a^2} \right] m_0 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3(1 - A)}{a^2} \right] m_1 \right\};$ $a_3 = U + 3h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{5h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3A^2(1 - A)}{a^2} \right] m_0 + \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3A(1 - A)}{a^2} \right] m_1 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{2h}{a} + \frac{3(1 - A)}{a^2} \right] m_2 \right\}$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
11	$\frac{\alpha}{s^3(s^2 + bs + a)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}};$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $b_3 = m_3$;</p> $m_0 = \frac{a}{\alpha h^2 (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \left\{ U + \right.$ $\left. + \left[4h + \frac{b}{a} - \frac{5h - 6h\sqrt{B} \cos \lambda h + hB}{2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \right] \sigma \right\};$ $B = e^{-bh}; \quad \lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}};$ $m_1 = - \frac{a(1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h)}{\alpha h^2 (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \left[4h + \frac{b}{a} - \frac{5h - 6h\sqrt{B} \cos \lambda h + hB}{2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} - \right. \right.$ $\left. - \frac{h}{1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h} \right] \sigma \right\};$ $m_2 = \frac{a(B + 2\sqrt{B} \cos \lambda h)}{\alpha h^2 (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \left[4h + \frac{b}{a} - \frac{5h - 6h\sqrt{B} \cos \lambda h + hB}{2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} - \right. \right.$ $\left. - \frac{2h\sqrt{B} \cos \lambda h}{B + 2\sqrt{B} \cos \lambda h} \right] \sigma \right\};$ $m_3 = - \frac{aB}{\alpha h^2 (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \left[3h + \frac{b}{a} - \frac{5h - 6h\sqrt{B} \cos \lambda h + hB}{2(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \right] \sigma \right\};$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{bh}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \right.$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$-\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{B}}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin \lambda h + (a - b^2) \cos \lambda h \right) m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a} \left\{ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{bh}{a} - \frac{\sqrt{B}}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin \lambda h + (a - b^2) \cos \lambda h \right) + \frac{B}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin 2\lambda h + (a - b^2) \cos 2\lambda h \right) \right] m_0 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{bh}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{B}}{a^2} \times \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin \lambda h + (a - b^2) \cos \lambda h \right) \right] m_1 \right\};$ $a_3 = U + 3h\sigma - \frac{\alpha}{a} \left\{ \left[\frac{5h^2}{2} - \frac{bh}{a} - \frac{B}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin 2\lambda h + (a - b^2) \cos 2\lambda h \right) + \frac{B\sqrt{B}}{a^2} \times \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin 3\lambda h + (a - b^2) \cos 3\lambda h \right) \right] m_0 + \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{bh}{a} - \frac{\sqrt{B}}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin \lambda h + (a - b^2) \cos \lambda h \right) + \frac{B}{a^2} \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin 2\lambda h + (a - b^2) \cos 2\lambda h \right) \right] m_1 + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{bh}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{B}}{a^2} \times \left(\frac{3ab - b^3}{2\lambda} \sin \lambda h + (a - b^2) \cos \lambda h \right) \right] m_2 \right\}$

№ п/п	Передающая функция объекта регулирования $G(s)$	Передающая функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
12	$\frac{\alpha}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $b_3 = m_3$,</p> $m_0 = \frac{a^2}{2\alpha h^2 (1 - \cos ah)} \left(U + \frac{5}{2} h\sigma \right);$ $m_1 = - \frac{a^2 (1 + 2 \cos ah)}{2\alpha h^2 (1 - \cos ah)} \left[U + \left(\frac{5}{2} h - \frac{h}{1 + 2 \cos ah} \right) \sigma \right];$ $m_2 = \frac{a^2 (1 + 2 \cos ah)}{2\alpha h^2 (1 - \cos ah)} \left[U + \left(\frac{5}{2} h - \frac{2h \cos ah}{1 + 2 \cos ah} \right) \sigma \right];$ $m_3 = - \frac{a^2}{2\alpha h^2 (1 - \cos ah)} \left(U + \frac{3}{2} h\sigma \right);$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{h^2}{2} - \frac{1}{a^2} \times \right. \\ \left. \times (1 - \cos ah) \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{1}{a^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\cos ah - \cos 2ah) \right] m_0 + \right. \\ \left. + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{1}{a^2} (1 - \cos ah) \right] m_1 \right\};$ $a_3 = U + 3h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{5h^2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{a^2} (\cos 2ah - \cos 3ah) \right] m_0 + \right. \\ \left. + \left[\frac{3h^2}{2} - \frac{1}{a^2} (\cos ah - \cos 2ah) \right] m_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{h^2}{2} - \frac{1}{a^2} (1 - \cos ah) \right] m_2 \right\}$

Записывая уравнения объекта регулирования в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_2' \end{bmatrix},$$

определяем расширенную дискретную матрицу перехода для объекта регулирования в виде

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h^2 & \frac{1}{6}\alpha h^3 \\ 0 & 1 & h & \frac{1}{2}\alpha h^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $u_2'(vh^+) = m_v$, $v = 0, 1, 2 \dots$

Далее последовательно находим

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= |0; 0; 0; m_0|; \\ v^T(h^+) &= \left| \frac{1}{6}\alpha h^3 m_0; \frac{1}{2}\alpha h^2 m_0; \alpha h m_0; m_1 \right|; \\ v(2h^+) &= \begin{bmatrix} \frac{7}{6}\alpha h^3 m_0 + \frac{1}{6}\alpha h^3 m_1 \\ \frac{3}{2}\alpha h^2 m_0 + \frac{1}{2}\alpha h^2 m_1 \\ \alpha h m_0 + \alpha h m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \\ v(3h^+) &= \begin{bmatrix} \frac{19}{6}\alpha h^3 m_0 + \frac{7}{6}\alpha h^3 m_1 + \frac{1}{6}\alpha h^3 m_2 \\ \frac{5}{2}\alpha h^2 m_0 + \frac{3}{2}\alpha h^2 m_1 + \frac{1}{2}\alpha h^2 m_2 \\ \alpha h m_0 + \alpha h m_1 + \alpha h m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При совместном выполнении условий

$$x_1(3h^+) = \frac{19}{6}\alpha h^3 m_0 + \frac{7}{6}\alpha h^3 m_1 + \frac{1}{6}\alpha h^3 m_2 = U + 3h\sigma + 9h^2\lambda;$$

$$x_2(3h^+) = \frac{5}{2}\alpha h^2 m_0 + \frac{3}{2}\alpha h^2 m_1 + \frac{1}{2}\alpha h^2 m_2 = \sigma + 6h\lambda;$$

$$x_3(3h^+) = \alpha h m_0 + \alpha h m_1 + \alpha h m_2 = 2\lambda;$$

$$u_2'(3h^+) = m_3 = 0$$

переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с рассматриваемым объектом регулирования заканчиваются за время $3h$. Решая систему из трех уравнений с тремя неизвестными (m_0, m_1, m_2), получаем

$$m_0 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{2}{\alpha h^2} \sigma + \frac{11}{3\alpha h} \lambda; \quad m_1 = -\frac{2U}{\alpha h^3} - \frac{3}{\alpha h^2} \sigma - \frac{7}{3\alpha h} \lambda;$$

$$m_2 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{1}{\alpha h^2} \sigma + \frac{2}{3\alpha h} \lambda.$$

Определив последовательность выходных импульсов цифрового регулятора, найдем последовательность входных импульсов:

$$u_2(0^+) = U;$$

$$u_2(h^+) = U + h\sigma + h^2\lambda - x_1(h^+) = \frac{5}{6}U + \frac{2h}{3}\sigma + \frac{7h^2}{18}\lambda;$$

$$u_2(2h^+) = U + 2h\sigma + 4h^2\lambda - x_1(2h^+) = \frac{1}{6}U + \frac{h}{6}\sigma + \frac{h^2}{9}\lambda;$$

$$u_2(3h^+) = U + 3h\sigma + 9h^2\lambda - x_1(3h^+) = 0.$$

Таким образом, передаточная функция оптимального цифрового регулятора (см. табл. 1.5)

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $a_1 = u_2(h^+)$; $a_2 = u_2(2h^+)$.

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau$, определяются вектором

$$\vartheta^T(\tau) = |x_1; x_2; x_3; m_0| = \left| \frac{1}{6} \alpha \tau^3 m_0; \frac{1}{2} \alpha \tau^2 m_0; \alpha \tau m_0; m_0 \right|. \quad (1.121)$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $h^+ \leq t < 2h$, $t = \tau + h$ определяются вектором

$$\vartheta(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \alpha h^3 m_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 \tau m_0 + \frac{1}{2} \alpha h \tau^2 m_0 + \frac{1}{6} \alpha \tau^3 m_1 \\ \frac{1}{2} \alpha h^2 m_0 + \alpha h \tau m_0 + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 m_1 \\ \alpha h m_0 + \alpha \tau m_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $2h^+ \leq t < 3h$, $t = \tau + 2h$ определяются вектором

$$\vartheta(\tau) = \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{6} m_0 + \frac{1}{6} m_1 \right) \alpha h^3 + \left(\frac{3}{2} m_0 + \frac{1}{2} m_1 \right) \alpha h^2 \tau + \\ + \frac{1}{2} (m_0 + m_1) \alpha h \tau^2 + \frac{1}{6} \alpha \tau^3 m_2 \\ \left(\frac{3}{2} m_0 + \frac{1}{2} m_1 \right) \alpha h^2 + (m_0 + m_1) \alpha h \tau + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 m_2 \\ (m_0 + m_1) \alpha h + \alpha \tau m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}. \quad (1.123)$$

1.5. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем на рис. 1.1, а при входных воздействиях $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(z)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
1	$\frac{\alpha}{s^3}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $b_0 = \frac{U}{\alpha h^3} + \frac{2}{\alpha h^2} \sigma + \frac{11}{3\alpha h} \lambda;$ $b_1 = -\frac{2U}{\alpha h^2} - \frac{3}{\alpha h} \sigma - \frac{7}{3\alpha h} \lambda;$ $b_2 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{1}{\alpha h} \sigma + \frac{2}{3\alpha h} \lambda;$ $a_1 = \frac{5}{6} U + \frac{2h}{3} \sigma + \frac{7h^2}{18} \lambda;$ $a_2 = \frac{1}{6} U + \frac{h}{6} \sigma + \frac{h^2}{9} \lambda$
2	$\frac{\alpha}{s^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1})},$ $b_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma + \frac{2}{\alpha} \lambda;$ $b_1 = -\frac{2U}{\alpha h^2} - \frac{2}{\alpha h} \sigma; \quad b_2 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{1}{2\alpha h} \sigma;$ $a_1 = \frac{U}{2} + \frac{h}{4} \sigma$
3	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p data-bbox="339 973 826 1029">где $b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0; b_2 = m_2 - m_1; b_3 = 2\lambda b/\alpha - m_3;$</p> $m_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)} \left\{ U + \sigma \left(3h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) + \lambda \left[\frac{5h}{b} - \frac{6h^2 B}{1-B} + \frac{2h^2}{(1-B)^2} - \frac{2h}{b(1-B)} \right] \right\};$ $m_1 = -\frac{b(1+B)}{\alpha h^2(1-B)} \left\{ U + \sigma \left(3h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{1+B} \right) + \lambda \left[\frac{5h}{b} - \frac{6h^2 B}{1-B} + \frac{2h^2}{(1-B)^2} - \frac{2h}{b(1-B)} - \frac{6h^2}{1+B} + \frac{2h^2}{1-B^2} - \frac{2h}{b(1+B)} \right] \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
3	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$m_2 = \frac{bB}{\alpha h^2(1-B)} \left\{ U + \sigma \left(2h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) + \lambda \left[\frac{3h}{b} - \frac{4h^2}{1-B} + \frac{2h^3}{(1-B)^2} - \frac{2h}{b(1-B)} + \frac{2h^2}{B} \right] \right\};$ $m_v = 2\lambda b/\alpha, \quad v = 3, 4, 5, \dots$

Пусть объект регулирования имеет параметр $\alpha = 100 \text{ с}^{-3}$. На вход системы поступает входное воздействие $u(t) = 1 + 2t + 15t^2$, т. е. $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 15 \text{ с}^{-2}$. Определим передающую функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$

$$W(z) = \frac{19,5 - 29,5z^{-1} + 13z^{-2}}{1 + 1,025z^{-1} + 0,21666z^{-2}},$$

где $b_0 = 10 + 2\sigma + \frac{11}{30}\lambda$; $a_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{15}\sigma + \frac{7}{1800}\lambda$; $b_1 = -20 - 3\sigma - \frac{7}{30}\lambda$; $a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{60}\sigma + \frac{1}{900}\lambda$; $b_2 = 10 + \sigma + \frac{2}{30}\lambda$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, a , рассчитанные при заданных параметрах объекта регулирования и цифрового регулятора по формулам (1.121) — (1.123), показаны на рис. 1.21.

Аналогичным образом определим передающую функцию оптимального цифрового регулятора в системе на рис. 1.1, a с объектом регулирования, имеющим передающую функцию $G(s) = \alpha/s^2$, при входном воздействии $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$.

Для такой системы найдем коэффициенты $m_0 = u_2'(0^+)$, $m_1 = u_2'(h^+)$ и $m_2 = u_2'(2h^+)$ из уравнений

$$x_1(2h^+) = \frac{3}{2} \alpha h^2 m_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 m_1 = U + 2h\sigma - 4h^2\lambda;$$

$$x_2(2h^+) = \alpha h m_0 + \alpha h m_1 = \sigma + 4h\lambda;$$

$$u_2'(2h^+) = m_2 = \frac{2}{\alpha} \lambda.$$

В результате получим

$$m_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma + \frac{2}{\alpha} \lambda; \quad m_1 = -\frac{U}{\alpha h^2} - \frac{1}{2\alpha h} \sigma + \frac{2}{\alpha} \lambda;$$

$$u_2(0^+) = U - x_1(0^+) = U;$$

$$u_2(h^+) = U + h\sigma + h^2\lambda - x_1(h^+) = \frac{U}{2} + \frac{h}{4} \sigma;$$

$$u_2(2h^+) = U + 2h\sigma + 4h^2\lambda - x_1(2h^+) = 0.$$

Передаточная функция оптимального цифрового регулятора (см. табл. 1.5)

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1})}$$

где $b_0 = m_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma + \frac{2}{\alpha} \lambda$; $b_1 = m_1 - m_0 = -\frac{2U}{\alpha h^2} - \frac{2}{\alpha h} \sigma$;
 $b_2 = m_2 - m_1 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{1}{2\alpha h} \sigma$, $a_1 = a_2 (h^+) = \frac{U}{2} + \frac{h}{4} \sigma$.

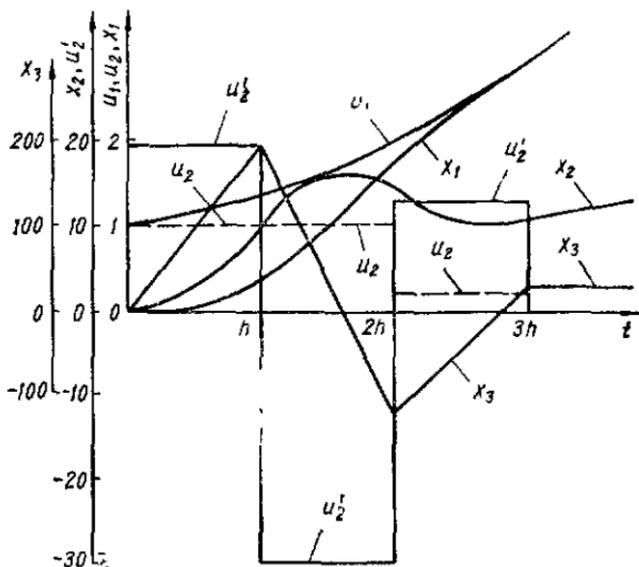


Рис. 1.21

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $t = \tau$ определяются вектором

$$\mathbf{v}^T(\tau) = |x_1; x_2; m_0| = \left| \frac{1}{2} \alpha \tau^2 m_0; \alpha \tau m_0; m_0 \right|. \quad (1.124)$$

Переходные процессы в интервале $0^+ \leq \tau < h$, $h^+ \leq t < 2h$, $t = \tau + h$ определяются вектором

$$\mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \alpha h^2 m_0 + \alpha h \tau m_0 + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 m_1 \\ \alpha h m_0 + \alpha \tau m_1 \\ m_1 \end{bmatrix}. \quad (1.125)$$

Пусть объект регулирования имеет параметр $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$. На вход системы поступает входное воздействие $u(t) = 1 + 2t + 15t^2$, т. е. $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 15 \text{ с}^{-2}$. Определим передаточную функцию оптимального цифрового регулятора при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$.

$$W(z) = \frac{16 - 24z^{-1} + 11z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,55z^{-1})}$$

где $b_0 = 10 + 1,5\sigma + 0,2\lambda$; $b_1 = -20 - 2\sigma$; $b_2 = 10 + 0,5\sigma$; $a_1 = -0,5 + 0,025\sigma$.

Цифровой регулятор формирует следующие управляющие воздействия на входе объекта регулирования $m_0 = b_0$; $m_1 = -10 - 0,5\sigma + 0,2\lambda$; $m_2 = 0,2\lambda$ при $v \geq 2$.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а, рассчитанные при заданных параметрах объекта регулирования и цифрового регулятора по формулам (1 124), (1 125), показаны на рис. 1.22.

На основании табл. 1.4 и 1.5 можно заключить, что для вычисления коэффициентов передаточной функции оптимального цифрового регулятора необходимо знать не только параметры передаточной функции объекта регулирования и значение шага квантования h , но и параметры типового (линейно изменяющегося либо линейно-квадратичного) входного воздействия (σ , λ).

Поэтому необходимо иметь специальные измерители величин σ и λ входного воздействия и специальные измерительные связи для подачи измеренных величин на дополнительные входы цифрового регулятора. Упрощенную структурную схему системы на рис. 1.1, а следует заменить

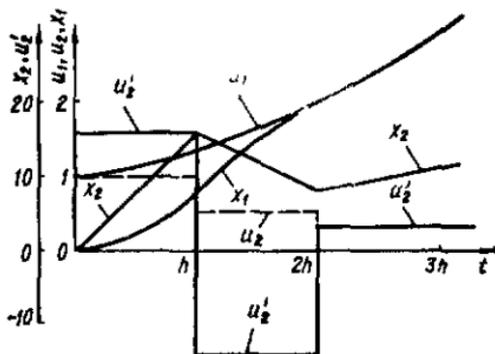


Рис. 1 22

на более сложную структурную схему на рис. 1.1, в (при учете дополнительно скорости входного воздействия) или на рис. 1.1, г (при учете скорости и ускорения) с измерителями I_σ и I_λ .

1.7. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ОБЪЕКТАМИ РЕГУЛИРОВАНИЯ, ИМЕЮЩИМИ ФОРСИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

Все рассмотренные системы имели линейные объекты регулирования, математические модели которых описывались передаточной функцией $G(s)$ (1.51). Полином в числителе этой передаточной функции — вырожденный. Изучение переходных процессов в таких системах при входных типовых воздействиях (ступенчатом, линейно изменяющемся, линейно-квадратичном) показывает, что при наличии в системе оптимального цифрового регулятора для данного типового воздействия и нулевых начальных условиях переходный процесс на выходе системы заканчивается без перерегулирования за минимальное время Nh , где N — порядок полинома в знаменателе передаточной функции $G(s)$.

Если полином в числителе передаточной функции $G(s)$ не является вырожденным, например, в простейшем случае объект регулирования имеет форсирующее звено, то оптимальный цифровой регулятор, рассчитанный изложенными выше методами при типовом возмущении и нулевых начальных условиях, обеспечит

печать переходной процесс на выходе системы за минимальное время Nh , но перерегулирование этого переходного процесса может быть любым, в зависимости от параметров форсирующего звена.

Рассмотрим систему управления на рис. 11, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha(s+d)[s^2(s+b)]^{-1}$. Пусть на вход системы поступает воздействие $u(t) = U + \sigma t$ и начальные условия в системе — нулевые. Схема аналогового моделирования объекта изображена на рис. 1.23. Запишем дифференциальные уравнения состояния системы:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = dx_3 - \alpha u_2' - bx_3; \quad \dot{x}_3 = \alpha u_2' - bx_3; \quad u_2' = 0.$$

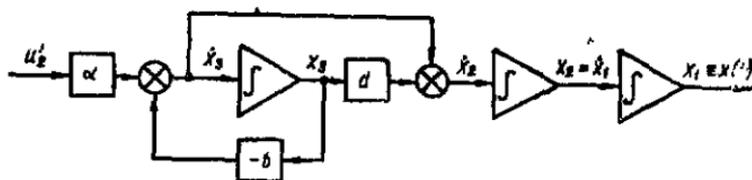


Рис. 1 23

Перепишав уравнения в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$, где $v^T = [x_1, x_2, x_3, u_2']$, определим дискретную матрицу перехода в виде

$$\Phi(h) = \begin{pmatrix} 1 & h & D & \alpha E \\ 0 & 1 & (d-b)Q & \alpha(h+D) \\ 0 & 0 & B & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $Q = \frac{1}{b}(1-B)$; $D = \frac{d-b}{b^2}(bh-1+B)$; $E = \frac{d-b}{2b^3}(h^2b^2 - 2hb + 2 - 2B) + \frac{h^2}{2}$; $B = e^{-bh}$. (1.126)

Обозначая $u_2'(vh^+) = m_v$, $v = 0, 1, 2, \dots$, последовательно находим

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= |0, 0; 0; m_0|; \\ v^T(h^+) &= |\alpha E m_0; \alpha(h+D)m_0; \alpha Q m_0; m_1|; \\ v^T(2h^+) &= \left| \begin{array}{l} \alpha(E+h^2+hD+DQ)m_0 + \alpha E m_1 \\ \alpha[h+D+(d-b)Q^2]m_0 + \alpha(h+D)m_1 \\ \alpha B Q m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{array} \right|; \\ v^T(3h^+) &= \left| \begin{array}{l} \alpha[E+2h^2+2hD+DQ+h(d-b)Q^2+BQD]m_0 + \\ \quad + \alpha(E+h^2+hD+DQ)m_1 + \alpha E m_2; \\ \alpha[h+D+(d-b)(1+B)Q^2]m_0 + \alpha[h+D+ \\ \quad + (d-b)Q^2]m_1 + \alpha(h+D)m_2; \\ \alpha B^2 Q m_0 + \alpha B Q m_1 + \alpha Q m_2 \\ m_3 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

В конечном состоянии систему можно перевести за три периода прерывания мгновенного ключа (за $3h$), если выполнить следующие условия:

$$x_1(3h^+) = U + 3h\sigma; \quad x_2(3h^+) = \sigma; \quad x_3(3h^+) = 0 \quad (1.127)$$

$$u_2'(3h^+) = m_3 = 0. \quad (1.128)$$

Решая систему уравнений (1.127), находим

$$m_1 = -(1+B)m_0 + \sigma \frac{b}{\alpha h d (1-B)}; \quad (1.129)$$

$$m_2 = Bm_0 - \sigma \frac{bB}{\alpha h d (1-B)}; \quad (1.130)$$

$$m_0 = \frac{b}{\alpha h^2 d (1-B)} \left[U + \sigma \left(\frac{5h}{2} - \frac{h}{1-B} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) \right]. \quad (1.131)$$

Подставляя выражение (1.131) в (1.129) и (1.130), окончательно находим

$$m_1 = -\frac{b(1+B)}{dh^2d(1-B)} \left[U + \sigma \left(\frac{5h}{2} - \frac{h}{1-B} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} - \frac{h}{1+B} \right) \right]; \quad (1.132)$$

$$m_2 = \frac{bB}{\alpha h^2 d (1-B)} \left[U + \sigma \left(\frac{3h}{2} - \frac{h}{1-B} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) \right]. \quad (1.133)$$

Определим входные дискреты цифрового регулятора:

$$\Theta(0^+) = U - x_1(0^+) = U;$$

$$\Theta(h^+) = U + h\sigma - x_1(h^+) = U + h\sigma - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{d-b}{b^3} (h^2 b^2 - 2hb + 2 - 2B) + h^2 \right] m_0; \quad (1.134)$$

$$\begin{aligned} \Theta(2h^+) &= U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = \\ &= U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[\frac{3dh^2}{b} - \frac{2(d-b)}{b^3} (bh - B + B^2) \right] m_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{d-b}{b^3} (h^2 b^2 - 2bh + 2 - 2B) + h^2 \right] m_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Передаточная функция цифрового регулятора (см. табл. 1.6, п. 1)

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

где коэффициенты $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; $b_2 = m_2$; $a_1 = \Theta(h^+)$; $a_2 = \Theta(2h^+)$ можно определить по формулам (1.131) — (1.135).

Переходные процессы на выходе системы (см. рис. 1.1, а) с рассмотренным объектом регулирования и цифровым регулятором при параметрах $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 5 \text{ с}^{-1}$, шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$, нулевых начальных условиях и воздействии на входе $u(t) = 1 + 2t$, $U = 1$, $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$ показаны на рис. 1.24, а для

указанных значений параметра форсирующего звена d . На рис. 1.24, б показаны переходные процессы на выходе системы (см рис. 1.1, а) при параметрах $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$, нулевых начальных условиях и единичном ступенчатом входном воздействии.

Рассмотрим систему управления на рис. 1.1, а с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha(s+d) [s(s+a)(s+b)]^{-1}$. Пусть на вход системы поступает типовое воздействие $u(t) = U + \sigma t$ и начальные условия в системе — нулевые.

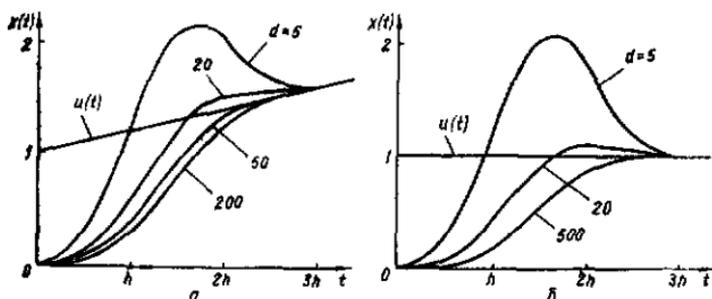


Рис 1.24

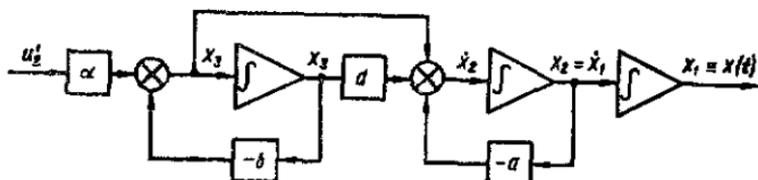


Рис 1.25

Схема аналогового моделирования объекта представлена на рис. 1.25. Запишем дифференциальные уравнения состояния для системы: $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = \alpha u_2' + (d-b)x_3 - ax_2$; $\dot{x}_3 = \alpha u_2' - bx_3$; $\dot{u}_2 = 0$.

Перепишывая уравнения в векторно-матричной форме $\dot{v} = Av$, где $v^T = [x_1, x_2, x_3, u_2']$, определяем дискретную матрицу перехода в виде

$$\Phi(h) = \begin{vmatrix} 1 & M & R & \alpha F \\ 0 & A & W & \alpha(R+M) \\ 0 & 0 & B & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где $A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $M = \frac{1-A}{a}$; $Q = \frac{1-B}{b}$; $W = (d-b) \times \frac{B-A}{a-b}$; $F = \frac{d-b}{a^2 b^2} \left[abh - (a+b) + \frac{a^2 B - b^2 A}{a-b} \right] + \frac{ah - 1 + A}{a^2}$; $R = \frac{d-b}{ab} \left(1 + \frac{bA - aB}{a-b} \right)$.

Обозначая $u'_2(\nu h^+) = m_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, последовательно находим

$$\begin{aligned} \varphi^T(0^+) &= |0, 0; 0; m_0|; \\ \varphi^T(h^+) &= |\alpha F m_0; \alpha(R+M)m_0; \alpha Q m_0; m_1|; \\ \varphi(2h^+) &= \begin{vmatrix} \alpha(F+RM+M^2+QR)m_0 + \alpha F m_1 \\ \alpha(RA+MA+QW)m_0 + \alpha(R+M)m_1 \\ \alpha Q B m_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{vmatrix}; \\ \varphi(3h^+) &= \begin{vmatrix} \alpha(F+RM+M^2+QR+MRA+M^2A+MQW+ \\ + QRB)m_0 + \alpha(F+RM+M^2+QR)m_1 + \alpha F m_2 \\ \alpha(RA^2+MA^2+QWA+QBW)m_0 + \alpha(RA+MA+ \\ + QW)m_1 + \alpha(R+M)m_2 \\ \alpha Q B^2 m_0 + \alpha Q B m_1 + \alpha Q m_2 \\ m_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В конечном состоянии систему можно перевести за три периода прерывания мгновенного ключа (за $3h$), если выполнить следующие условия:

$$x_1(3h^+) = U + 3h\sigma; \quad x_2(3h^+) = \sigma; \quad x_3(3h^+) = \frac{a}{d}\sigma \quad (1.136)$$

и

$$u'_2(3h^+) = m_3 = \frac{ab}{\alpha d}\sigma. \quad (1.137)$$

Решая систему уравнений (1.136), находим

$$m_1 = -(A+B)m_0 + \sigma \frac{ab}{\alpha d(1-A)(1-B)}; \quad (1.138)$$

$$m_2 = ABm_0 + \sigma \frac{ab(1-A-B)}{\alpha d(1-A)(1-B)}; \quad (1.139)$$

$$m_0 = \frac{ab}{\alpha dh(1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{d} \right) \right]. \quad (1.140)$$

Подставляя выражение (1.140) в (1.138) и (1.139), окончательно находим

$$m_1 = -\frac{(A+B)ab}{\alpha dh(1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{d} - \frac{h}{A+B} \right) \right]; \quad (1.141)$$

$$m_2 = \frac{ABab}{\alpha dh(1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{d} - \frac{h}{A} - \frac{h}{B} + \frac{h}{AB} \right) \right]. \quad (1.142)$$

Определим входные дискреты цифрового регулятора

$$\begin{aligned} \Theta(0^+) &= U - x_1(0^+) = U; \quad \Theta(h^+) = U + h\sigma - x_1(h^+) = \\ &= U + h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \frac{d}{ab} \left[abh - (a+b) + \frac{a^2B - b^2A}{a-b} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 1 + \frac{bA - aB}{a-b} \right\} m_0; \end{aligned} \quad (1.143)$$

$$\begin{aligned} \Theta(2h^+) &= U + 2h\sigma - x_1(2h^+) = \\ &= U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{d}{ab} \left(abh + \frac{b^2A(1-A) - a^2B(1-B)}{a-b} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{aB(1-B) - bA(1-A)}{a-b} \right] m_0 + \left[\frac{d}{ab} \left(abh - a - b + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{a^2B - b^2A}{a-b} \right) + 1 + \frac{bA - aB}{a-b} \right] m_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Учитывая, что $m_v = \frac{ab}{\alpha d} \sigma$ при $v \geq 3$, запишем передаточную функцию цифрового регулятора

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$$

где коэффициенты $a_1 = \Theta(h^+)$; $a_2 = \Theta(2h^+)$; $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{ab}{\alpha d} \sigma - m_2$ можно определить по формулам (1.140) – (1.144).

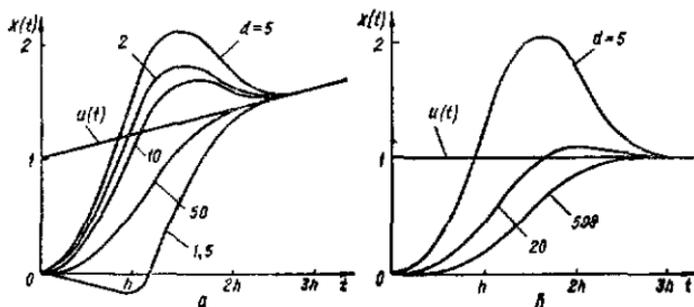


Рис. 1.26

Пусть математическая модель объекта регулирования (см. рис. 1.25) описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha (s + d) [s(s + d)(s + b)]^{-1}$, где $\alpha = 800 \text{ с}^{-2}$; $a = 20 \text{ с}^{-1}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Шаг квантования $h = 0,1$. На вход системы подается типовое возмущение $u(t) = U + \sigma t$; $U = 1$; $\sigma = 2 \text{ с}^{-1}$. Рассчитанные переходные процессы в системе на рис. 1.1, а при указанном объекте регулирования и регуляторе для различных значений параметра d изображены на рис. 1.26, а. Для объекта регулирования с параметрами $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$; $a = 3 \text{ с}^{-1}$; $b = 2 \text{ с}^{-1}$, при шаге квантования $h = 0,1 \text{ с}$, $U = 1$ и $\sigma = 0$ переходные процессы в системе на рис. 1.1, а для различных значений параметра d изображены на рис. 1.26, б.

Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем на рис. 1.1, а с объектами регулирования третьего порядка, имеющими форсирующие звенья, при входных воздействиях $u(t) = U + \sigma t$ приведены в табл. 1.6. Если принять в табл. 1.6 $\sigma = 0$, получим передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем на рис. 1.1, а с объектами регулирования, имеющими форсирующие звенья, при ступенчатых входных воздействиях. В табл. 1.7 приведены з-изображения оптимальных управляющих воздействий на статические объекты регулирования третьего порядка, имеющие форсирующие звенья,

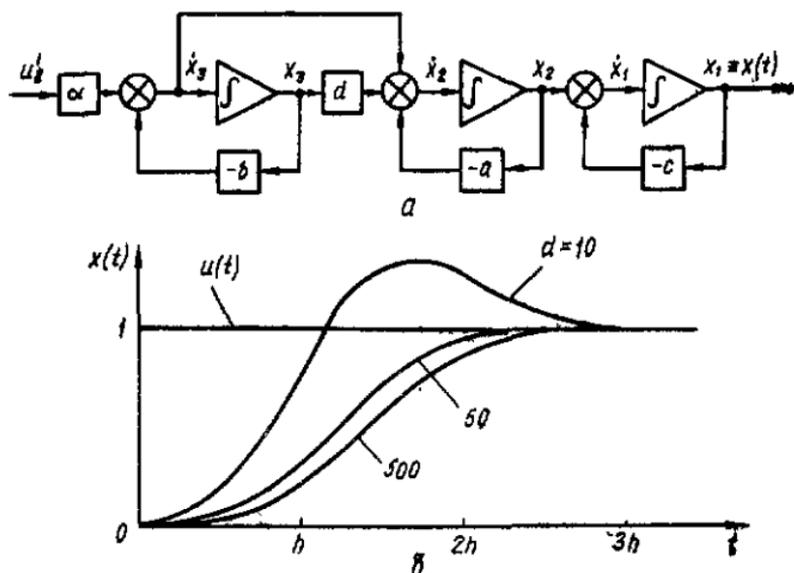


Рис. 1.27

в системах на рис. 1.1, а при единичных ступенчатых воздействиях.

Переходные процессы в системе на рис. 1.1, а с объектом регулирования, математическая модель которого изображена на рис. 1.27, а и описывается передаточной функцией $G(s) = \frac{\alpha}{(s+d)[(s+a)(s+b)(s+c)]}$ при $\alpha = 10 \text{ с}^{-1}$, $a = 5 \text{ с}^{-1}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $c = 3 \text{ с}^{-1}$ и различных значениях d изображены на рис. 1.27, б.

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ КВАНТОВАНИЯ

При наличии в объектах регулирования нелинейности типа «насыщение» целесообразно использовать цифровые регуляторы с неравномерным шагом квантования. В системах с такими регуляторами можно получать более высокое быстродействие, чем в тех же системах с цифровыми регуляторами, имеющими равномерный шаг квантования. При помощи цифровых регуляторов с неравномерным шагом квантования можно формировать управ-

1.6. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем на рис. 1.1, а с объектами регулирования, имеющими форсирующие звенья, при входных воздействиях $u(t) = U + \sigma t$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $\Psi(z)$
1	$\frac{\alpha(s+d)}{s^2(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1; b_2 = m_2;$</p> $m_0 = \frac{b}{\alpha h^2 d (1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) \right];$ $m_1 = -\frac{(1+B)b}{\alpha h^2 d (1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} - \frac{h}{1+B} \right) \right];$ $m_2 = \frac{bB}{\alpha h^2 d (1-B)} \left[U + \sigma \left(2h - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) \right];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{2} \left[(d-b) \frac{1}{b^3} (h^2 b^2 - 2bh + + 2 - 2B) + h^2 \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[\frac{3dh^2}{b} - (d-b) \times \right. \right.$ $\times \left. \frac{2(bh - B + B^2)}{b^3} \right] m_0 + \left[(d-b) \times \right.$ $\times \left. \frac{h^2 b^2 - 2bh + 2 - 2B}{b^3} + h^2 \right] m_1 \left. \right\}$
2	$\frac{\alpha(s+d)}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0; b_2 = m_2 - m_1;$</p> $b_3 = \frac{ab}{\alpha d} \sigma - m_2;$ $m_0 = \frac{ab}{\alpha dh (1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{h}{ab} + \frac{\alpha+b}{ab} - \frac{1}{d} \right) \right];$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$m_1 = -\frac{(A+B)ab}{\alpha dh(1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{d} - \frac{h}{A+B} \right) \right];$ $m_2 = \frac{ABab}{\alpha dh(1-A)(1-B)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{d} - \frac{h}{A} - \frac{h}{B} + \frac{h}{AB} \right) \right];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \frac{d}{ab} \left[abh - a - b + \frac{a^2B - b^2A}{a-b} \right] + 1 + \frac{bA - aB}{a-b} \right\} m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{ab} \left\{ \left[\frac{d}{ab} \left(abh + \frac{b^2A(1-A) - a^2B(1-B)}{a-b} \right) + \frac{aB(1-B) - bA(1-A)}{a-b} \right] m_0 + \left[\frac{d}{ab} \left(abh - a - b + \frac{a^2B - b^2A}{a-b} \right) + 1 + \frac{bA - aB}{a-b} \right] m_1 \right\}$
3	$\frac{\alpha(s+d)}{s(s+a)^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a^2}{\alpha d} \sigma - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a^2}{\alpha dh(1-A)^2} \left[U + \sigma \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} - \frac{1}{d} \right) \right];$

№ п/п	Передающая функция объекта регулирования $G(s)$	Передающая функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$m_1 = -\frac{2a^2A}{\alpha dh (1-A)^2} \left[U + \sigma \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} - \frac{1}{d} - \frac{h}{2A} \right) \right];$ $m_2 = \frac{a^2A^2}{\alpha dh (1-A)^2} \left[U + \sigma \left(3h + \frac{2}{a} - \frac{2h}{1-A} - \frac{1}{d} + \frac{h}{A^2} - \frac{2h}{A} \right) \right];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{d}{a^2} (a^2h - 2a + 2aA) + \right. \\ \left. + 1 - A \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{d}{a^2} (a^2h - 2aA + 2aA^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + A - A^2 \right] m_0 + \left[\frac{d}{a^2} (a^2h - 2a + 2aA) + \right. \right. \\ \left. \left. + 1 - A \right] m_1 \right\}$
4	$\frac{\alpha(s+d)}{s(s^2+bs+a)}$	$\frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})}$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a\sigma}{\alpha d} - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a}{\alpha dh (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \sigma \left[3h + \frac{b}{a} - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} - \frac{1}{d} \right] \right\};$ $m_1 = -\frac{2a\sqrt{B} \cos \lambda h}{\alpha dh (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \sigma \left[3h + \frac{b}{a} - \right. \right.$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
		$ \begin{aligned} & - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} - \\ & - \frac{1}{d} - \frac{h}{2\sqrt{B} \cos \lambda h} \Bigg\}; \\ m_2 & = \frac{aB}{\alpha dh(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times \\ & \times \left\{ U + \sigma \left[3h + \frac{b}{a} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} - \frac{1}{d} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h)h}{B} \right] \right\}; \\ a_1 & = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a} \left\{ \frac{d}{a} [ah - b + b\sqrt{B} \times \right. \\ & \times \left. \left(\cos \lambda h + \frac{b^2 - 2a}{2b\lambda} \sin \lambda h \right) \right\} + 1 - \\ & - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right) \Bigg\} m_0; \\ a_2 & = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a} \left\{ \left[\frac{d}{a} (ah - \right. \right. \\ & - b\sqrt{B} (\cos \lambda h - \sqrt{B} \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin \lambda h + \\ & + bB \cos 2\lambda h + B \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin 2\lambda h) + \\ & + \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right) - \\ & - B \left(\cos 2\lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin 2\lambda h \right) \right] m_0 + \\ & + \left[\frac{d}{a} \left(ah - b + b\sqrt{B} \cos \lambda h + \right. \right. \\ & + \sqrt{B} \frac{b^2 - 2a}{2\lambda} \sin \lambda h \Big) + 1 - \\ & - \sqrt{B} \left(\cos \lambda h + \frac{b}{2\lambda} \sin \lambda h \right) \Bigg\} m_1 \Bigg\}; \\ B & = e^{-bh}; \lambda = \sqrt{a - b^2/4} \end{aligned} $

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	Передаточная функция оптимального цифрового регулятора $W(z)$
5	$\frac{\alpha(s+d)}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1-z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a^2 \sigma}{\alpha d} - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a^3}{2\alpha d h (1 - \cos ah)} \left[U + \sigma \left(2h - \frac{1}{d} \right) \right];$ $m_1 = -\frac{a^2 \cos ah}{\alpha d h (1 - \cos ah)} \left[U + \sigma \left(2h - \frac{1}{d} - \frac{h}{2 \cos ah} \right) \right];$ $m_2 = \frac{a^3}{2\alpha d h (1 - \cos ah)} \left[U + \sigma \left(3h - \frac{1}{d} - 2h \cos ah \right) \right];$ $a_1 = U + h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left[\frac{d}{a^2} (a^2 h - a \sin ah) + 1 - \cos ah \right] m_0;$ $a_2 = U + 2h\sigma - \frac{\alpha}{a^2} \left\{ \left[\frac{d}{a^2} (a^2 h + a \sin ah - a \sin 2ah) + \cos ah - \cos 2ah \right] m_0 + \left[\frac{d}{a^2} (a^2 h - a \sin ah) + 1 - \cos ah \right] m_1 \right\}$

1.7. z-изображения оптимальных управляющих воздействий на статические объекты регулирования третьего порядка, имеющие форсирующие звенья, в системах на рис. 1.1, а

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия $M(z)$
1	$\frac{\alpha(s+d)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}}$ <p>где $K_0 = \frac{abc}{\alpha d (1-A)(1-B)(1-C)}$; $b_1 = -(A+B+C)$; $b_2 = AB+BC+$</p>

№ п/п	Передающая функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия $M(z)$
		$+CA; b_3 = -ABC; A = e^{-ah};$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}$
2	$\frac{\alpha(s+d)}{(s+c)(s+a)^2}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ где $K_0 = \frac{a^2 c}{\alpha d (1-A)^2 (1-C)};$ $b_1 = -(2A + C); b_2 = A^2 + 2AC;$ $b_3 = -A^2 C; A = e^{-ah}; B = e^{-bh};$ $C = e^{-ch}$
3	$\frac{\alpha(s+d)}{(s+c)(s^2+bs+a)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ где $K_0 =$ $= \frac{ac}{\alpha d (1-C) (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)};$ $b_1 = -(C + 2\sqrt{B} \cos \lambda h); b_2 = B +$ $+ 2C\sqrt{B} \cos \lambda h; b_3 = -BC;$ $B = e^{-bh}; C = e^{-ch}; \lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}$
4	$\frac{\alpha(s+d)}{(s+c)(s^2+a^2)}$	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ где $K_0 = \frac{a^2 c}{2\alpha d (1-C) (1 - \cos ah)};$ $b_1 = -(C + 2 \cos ah); b_2 = 1 +$ $+ 2C \cos ah; b_3 = -C; C = e^{-ch}$

ляющие воздействия на объекты регулирования m_0, m_1, \dots , равные по величине.

Определим оптимальные управляющие воздействия, формируемые цифровыми регуляторами при неравномерном шаге квантования в системе на рис. 1.2, а с объектом регулирования второго порядка. Пусть при поступлении на вход системы единичной ступенчатой функции и при нулевых начальных условиях с выхода регулятора на вход объекта регулирования в интервале длительностью h_0 поступает управляющее воздействие m_0 , а в последующем интервале длительностью h_1 поступает воздействие m_1 .

По известной дискретной матрице перехода для объекта регулирования, используя описанную выше методику, последовательно запишем

$$\begin{aligned} \varphi^T(h_0) &= (\Phi(h_0) \varphi(0^+))^T = \{ \alpha P_0 m_0; \alpha Q_0 m_0; m_0 \}; \\ \varphi^T(h_0^+) &= \{ \alpha P_0 m_0; \alpha Q_0 m_0; m_1 \}; \\ \varphi(h_0 + h_1) &= \Phi(h_1) \varphi(h_0^+) = \begin{Bmatrix} \alpha P_0 m_0 + \alpha Q_0 Q_1 m_0 + \alpha P_1 m_1 \\ \alpha Q_0 B_1 m_0 + \alpha Q_1 m_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

где $B_0 = e^{-bh_0}$; $Q_0 = \frac{1}{b}(1 - B_0)$; $P_0 = \frac{1}{b}(h_0 - Q_0)$; $B_1 = e^{-bh_1}$; $Q_1 = \frac{1}{b}(1 - B_1)$; $P_1 = \frac{1}{b}(h_1 - Q_1)$.

Условия, при которых в системе на рис. 1.2, а переходные процессы заканчиваются за два указанных шага квантования,

$$\begin{aligned} x_1(h_0 + h_1) &= \alpha P_0 m_0 + \alpha Q_0 Q_1 m_0 + \alpha P_1 m_1 = 1; \\ x_2(h_0 + h_1) &= \alpha Q_0 B_1 m_0 + \alpha Q_1 m_1 = 0. \end{aligned}$$

Решая записанную систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{Q_0}{Q_1} B_1 m_0 = -\frac{(1 - B_0) B_1}{1 - B_1} m_0; \quad (1.145) \\ m_0 &= \frac{1}{\alpha \left(P_0 + Q_0 Q_1 - P_1 B_1 \frac{Q_0}{Q_1} \right)} = \frac{b(1 - B_1)}{\alpha [h_0(1 - B_1) - h_1 B_1(1 - B_0)]}. \quad (1.146) \end{aligned}$$

Из уравнения (1.145) можно найти условие, при котором $|m_0| = |m_1| = |m| = (1 - B_0) B_1 = 1 - B_1$ или

$$1 - e^{-bh_1} (2 - e^{-bh_0}) = 0. \quad (1.147)$$

При выполнении условия (1.147) шаги квантования h_0 и h_1 связаны соотношением

$$h_1 = + \frac{1}{b} \ln(2 - e^{-bh_0}), \quad (1.148)$$

амплитуда управляющих воздействий

$$m = \frac{b}{\alpha} \frac{1}{h_0 - h_1}. \quad (1.149)$$

Таким образом, в этом случае амплитуда управляющих воздействий зависит от разности шагов квантования

$$\Delta h = h_0 - h_1 = h_0 - \frac{1}{b} \ln(2 - e^{-bh_0}). \quad (1.150)$$

Зависимости $h_1 = f(h_0)$ (сплошные линии), $\Delta h = f(h_0)$ (штриховые линии) и $m\alpha = f(\Delta h)$, построенные по формулам (1.148) — (1.150) для различных значений b , изображены на рис. 1.28. При малых значениях h_0 значения величин h_1 и Δh также небольшие.

Рассмотрим пример. Пусть объект регулирования в системе на рис. 1.1, a имеет передаточную функцию $G(s) = 0,2 [s(s +$

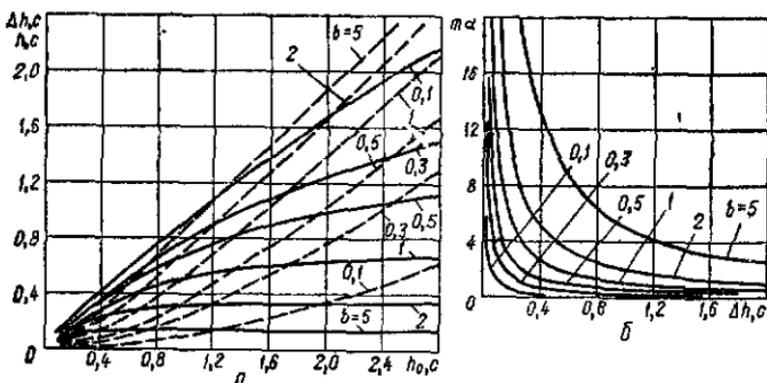


Рис. 1.28

$+ 0,5]^{-1}$, т. е. $b = 0,5 \text{ с}^{-1}$ и $\alpha = 0,2 \text{ с}^{-2}$. На вход системы поступает единичное ступенчатое воздействие. Для получения оптимальных переходных процессов в системе цифровой регулятор с равномерным шагом квантования $h = 1$ с должен сформировать два управляющих импульса с амплитудами:

$$m_0 = b [\alpha h (1 - e^{-bh})]^{-1} = 0,5 [0,2 (1 - e^{-0,5})]^{-1} \approx 6,35;$$

$$m_1 = -e^{-bh} m_0 = -e^{-0,5} \cdot 6,35 = -3,85.$$

Переходные процессы заканчиваются за время $T = Nh = 2 \text{ с}$.

Цифровой регулятор с неравномерным шагом квантования для интервала первого шага $h_0 = 1$ с должен сформировать интервал второго шага

$$h_1 = \frac{1}{0,5} \ln(2 - e^{-0,5}) = 0,6636 \text{ с}.$$

При этом $\Delta h = h_0 - h_1 = 0,3364 \text{ с}$ и амплитуда управляющих импульсов

$$m = \frac{0,5}{0,2 \cdot 0,3364} \approx 7,43.$$

Переходные процессы заканчиваются за время $T = h_0 + h_1 \approx 1,6636 \text{ с}$.

1.9. УЧЕТ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПО СКОРОСТИ

В системах, имеющих оптимальные цифровые регуляторы для линейно-изменяющихся входных воздействий, но работающих при произвольных входных воздействиях, часто необходимо учитывать ненулевые начальные условия по скорости.

Рассмотрим систему на рис. 1.2, а, на вход которой поступает линейно изменяющееся входное воздействие u_1 вида $u(t) = U + \sigma_1 t$, а вектор начальных условий

$$\varphi^T(0^+) = [x_1(0^+); x_2(0^+); u_2'(0^+)] = [0; \sigma_0; m_0].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^T(h^+) &= [Q\sigma_0 + \alpha P m_0; B\sigma_0 + \alpha Q m_0; m_1]; \\ \varphi^T(2h^+) &= \begin{bmatrix} \alpha(P + Q^2)m_0 + Q(1 + B)\sigma_0 + \alpha P m_1 \\ \alpha B Q m_0 + B^2 \sigma_0 + \alpha Q m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в установившемся режиме при $t \geq 2h$ значения выходной координаты и ее производной должны повторять входное воздействие и его производную, т. е. $x_1 = u_1 = U + \sigma_1 t$ и $\dot{x}_1 = \dot{u}_1 = \sigma_1$, определяем оптимальные управляющие воздействия на входе объекта из условий $x_1(2h^+) = U + 2h\sigma_1$ и $x_2(2h^+) = \sigma_1$. В результате получим

$$\begin{aligned} m_1 &= -B m_0 + \frac{1}{\alpha Q} \sigma_1 - \frac{B^2}{\alpha Q} \sigma_0; \\ m_0 &= \frac{U}{\alpha(P + Q^2 - BP)} - \frac{2hQ - P}{\alpha Q(P + Q^2 - BP)} \sigma_1 + \\ &+ \frac{B^2 P - Q^2(1 + B)}{\alpha Q(P + Q^2 - BP)} \sigma_0. \end{aligned}$$

Используя формулы (1.3), окончательно найдем

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{b}{\alpha h(1 - B)} \left[U + \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1 - B} \right) \sigma_1 - \left(\frac{1}{b} - \frac{hB^2}{1 - B} \right) \sigma_0 \right]; \\ m_1 &= -\frac{bB}{\alpha h(1 - B)} \left\{ U + \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1 - B)} \right] \sigma_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{b} - \frac{hB}{1 - B} \right) \sigma_0 \right\}. \end{aligned}$$

В установившемся режиме $m_v = \frac{b}{\alpha} \sigma_1$ при $v \geq 2$. Поэтому z -изображение оптимального управляющего воздействия можно записать в виде

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + \frac{b}{\alpha} \sigma_1 (z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-v} + \dots).$$

Или

$$M(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = \frac{b}{\alpha} \sigma_1 - m_1$.

1.8. z-изображения оптимальных управляющих воздействий с учетом ненулевых начальных условий по скорости

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
1	$\frac{\alpha}{s^2}$	$b_0 + b_1 z^{-1},$ <p>где $b = m_0; b_1 = m_1;$</p> $m_0 = \frac{1}{\alpha h^2} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{3}{2} h \right];$ $m_1 = -\frac{1}{\alpha h^2} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{h}{2} \right]$
2	$\frac{\alpha}{s(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0; b_2 =$ $= \frac{b}{\alpha} \sigma_1 - m_1;$</p> $m_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)} \left[U + \sigma_1 \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) - \sigma_0 \left(\frac{1}{b} - \frac{B^2 h}{1-B} \right) \right];$ $m_1 = -\frac{Bb}{\alpha h(1-B)} \left\{ U + \sigma_1 \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)} \right] - \sigma_0 \left(\frac{1}{b} - \frac{Bh}{1-B} \right) \right\}$
3	$\frac{\alpha}{s^3}$	$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1; b_2 = m_2;$</p> $m_0 = \frac{1}{\alpha h^3} [U + (\sigma_1 - \sigma_0) 2h];$ $m_1 = -\frac{2}{\alpha h^3} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{3}{2} h \right];$ $m_2 = \frac{1}{\alpha h^3} [U + (\sigma_1 - \sigma_0) h]$
4	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2},$ <p>где $b_0 = m_0; b_1 = m_1; b_2 = m_2;$</p> $m_0 = \frac{b}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left(3h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) \right];$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$m_1 = -\frac{(1+B)b}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left(3h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{1+B} \right) \right];$ $m_2 = \frac{Bb}{\alpha h^2(1-B)} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left(2h - \frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) \right]$
5	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{ab}{\alpha} \sigma_1 - m_2$;</p> $m_0 = \frac{ab}{\alpha h(1-A)(1-B)} \left\{ U + \sigma_1 \left(3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} \right) - \right.$ $\left. - \sigma_0 \left[2h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + h(A+B) - hAB \right] \right\};$ $m_1 = -\frac{(A+B)ab}{\alpha h(1-A)(1-B)} \times$ $\times \left[U + \sigma_1 \left(3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{A+B} \right) - \sigma_0 \left(2h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} + \frac{h}{A+B} \right) \right];$ $m_2 = \frac{ABab}{\alpha h(1-A)(1-B)} \times$ $\times \left[U + \sigma_1 \left(3h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} - \frac{h}{A} - \frac{h}{B} + \frac{h}{AB} \right) - \sigma_0 \left(2h + \frac{a+b}{ab} - \frac{h}{1-A} - \frac{h}{1-B} \right) \right]$

№ л/п	Передающая функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
6	$\frac{\alpha}{s(s+b)^2}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{b^2}{\alpha} \sigma_1 - m_2$;</p> $m_0 = \frac{b^2}{\alpha h (1-B)^2} \left[U + \sigma_1 \left(3h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} \right) - \sigma_0 \left(2h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} + 2hB - hB^2 \right) \right];$ $m_1 = - \frac{2Bb^2}{\alpha h (1-B)^2} \left[U + \sigma_1 \left(3h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} - \frac{h}{2B} \right) - \sigma_0 \left(2h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} + \frac{hB}{2} \right) \right];$ $m_2 = \frac{B^2 b^2}{\alpha h (1-B)^2} \left[U + \sigma_1 \left(3h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} - \frac{2h}{B} + \frac{h}{B^2} \right) - \sigma_0 \left(2h + \frac{2}{b} - \frac{2h}{1-B} \right) \right]$
7	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a}{\alpha} \sigma_1 - m_2$;</p> $m_0 = \frac{a}{\alpha h (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)} \times$ $\times \left\{ U + \sigma_1 \left[3h - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} + \frac{b}{a} \right] - \sigma_0 \left[2h - \frac{2h(1 - \sqrt{B} \cos \lambda h)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B} + \frac{b}{a} + 2h\sqrt{B} \cos \lambda h - hB \right] \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	z-изображение оптимального управляющего воздействия на объект регулирования $M(z)$
		$m_1 = -\frac{2a\sqrt{B}\cos\lambda h}{ah(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B)} \times$ $\times \left\{ U + \sigma_1 \left[3h - \frac{2h(1-\sqrt{B}\cos\lambda h)}{1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B} + \right. \right.$ $\left. + \frac{b}{a} - \frac{h}{2\sqrt{B}\cos\lambda h} \right] - \sigma_0 \left[2h - \right.$ $\left. - \frac{2h(1-\sqrt{B}\cos\lambda h)}{1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B} + \frac{b}{a} + \right.$ $\left. + \frac{hB}{2\sqrt{B}\cos\lambda h} \right] \Bigg\};$ $m_2 = \frac{aB}{ah(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B)} \times$ $\times \left\{ U + \sigma_1 \left[3h - \frac{2h(1-\sqrt{B}\cos\lambda h)}{1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B} + \right. \right.$ $\left. + \frac{b}{a} + \frac{(1-2\sqrt{B}\cos\lambda h)h}{B} \right] -$ $\left. - \sigma_0 \left[2h - \frac{2h(1-\sqrt{B}\cos\lambda h)}{1-2\sqrt{B}\cos\lambda h+B} + \frac{b}{a} \right] \right\}$
8	$\frac{\alpha}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - z^{-1}},$ <p>где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1 - m_0$; $b_2 = m_2 - m_1$; $b_3 = \frac{a^2}{\alpha} \sigma_1 - m_3$;</p> $m_0 = \frac{a^2}{2\alpha h(1 - \cos ah)} (U + \sigma_1 2h -$ $- \sigma_0 2h \cos ah);$ $m_1 = -\frac{a^2 \cos ah}{ah(1 - \cos ah)} \left[U + \sigma_1 \left(2h - \right. \right.$ $\left. - \frac{h}{2 \cos ah} \right) - \sigma_0 \left(h + \frac{h}{2 \cos ah} \right) \Bigg];$ $m_2 = \frac{a^2}{2\alpha h(1 - \cos ah)} [U + \sigma_1 (3h -$ $- 2h \cos ah) - \sigma_0 h]$
	Примечание.	$A = e^{-ah}$; $B = e^{-bh}$; $\lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}$

В табл. 1.8 приведены z-изображения оптимальных управляющих воздействий на линейные объекты регулирования с различными передаточными функциями $G(s)$ при ненулевых начальных условиях по скорости для систем управления, на вход которых поступает воздействие $u(t) = U + \sigma_1 t$.

Если в момент подачи воздействия $u(t) = U + \sigma_1 t$ на вход системы управления выходная координата системы имела скорость σ_0 , то управляющие воздействия m_0, m_1, \dots, m_{N-1} на вход объекта регулирования с астатизмом первого порядка подаются вместе со «скоростной подставкой». Для объекта с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ эта подставка равна $b\sigma_0/\alpha$; для объекта с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)]^{-1}$ она равна $ab\sigma_0/\alpha$ и т. д. Таким образом, чтобы получить аналитические выражения для амплитуд m_0, m_1, \dots, m_{N-1} управляющего воздействия на входе объекта регулирования при начальной скорости σ_0 необходимо: в выражения, полученные при нулевой начальной скорости, вместо σ подставить величину $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_0$; к полученным выражениям прибавить величину «скоростной подставки». Например, для объекта с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$, заменяя в выражениях для m_0 и m_1 (см. табл. 1.4) величину σ на $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_0$ и прибавляя к полученным выражениям величину $b\sigma_0/\alpha$, находим амплитуды управляющих воздействий при ненулевой начальной скорости σ_0 :

$$m_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)} \left[U + \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) (\sigma_1 - \sigma_0) \right] + \frac{b}{\alpha} \sigma_0 =$$

$$= \frac{b}{\alpha h(1-B)} \left[U + \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) \sigma_1 - \left(\frac{1}{b} - \frac{hB^2}{1-B} \right) \sigma_0 \right];$$

$$m_1 = - \frac{bB}{\alpha h(1-B)} \left\{ U + \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)} \right] (\sigma_1 - \sigma_0) \right\} + \frac{b}{\alpha} \sigma_0 =$$

$$= - \frac{bB}{\alpha h(1-B)} \left\{ U + \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)} \right] \sigma_1 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{b} - \frac{hB}{1-B} \right) \sigma_0 \right\}.$$

Эти выражения совпадают с записанными в табл. 1.8. Чтобы получить аналитические выражения для амплитуд m_0, m_1, \dots, m_{N-1} управляющего воздействия на входе объекта регулирования с астатизмом второго и более высокого порядка при начальной скорости σ_0 , необходимо в выражения, полученные при нулевой начальной скорости, вместо σ подставить величину $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_0$ (см. табл. 1.4 и 1.8).

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

2.1. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Системы управления с цифровыми регуляторами работают при произвольных входных воздействиях, для которых необходимо обеспечивать заданное качество систем управления. Обычно качество систем определяется ошибкой слежения $\Theta(t) = u(t) - x(t)$, т. е. разностью между задающим воздействием и выходной координатой. Оценка качества системы по величине ошибки называется анализом точности.

Оптимальные по критерию минимума времени переходного процесса системы на рис. 1.1 при подаче входных типовых воздействий (ступенчатой, линейно-изменяющейся или линейно-квадратичной функции) оказываются далеко не оптимальными по другим критериям и не обеспечивают хорошего качества при произвольных входных воздействиях. Однако, используя определенные способы построения структурных схем, можно обеспечить для систем управления, оптимальных по критерию быстродействия при типовых воздействиях, высокое качество при произвольных входных воздействиях.

Рассмотрим систему на рис. 1.1, a в оптимальным цифровым регулятором для ступенчатого входного воздействия. Пусть система имеет астатический объект регулирования, динамика которого описывается линейным дифференциальным уравнением N -го порядка. Тогда при подаче на вход системы ступенчатого воздействия $u(t) = U$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях переходные процессы в системе заканчиваются за время $T = Nh$, и после окончания переходных процессов на входах всех интеграторов в схеме аналогового моделирования объекта регулирования устанавливаются нулевые сигналы. Таким образом, через время $T = Nh$ после подачи ступенчатого возмущения в системе снова устанавливаются нулевые начальные условия.

Предположим, что входное воздействие $u(t)$ является электрической величиной (например, напряжением). Включим на вход системы дополнительно мгновенный импульсный элемент (мгновенный ключ) с периодом замыкания $T = Nh$ и фиксатор нулевого порядка, который преобразует мгновенные импульсы в последовательность прямоугольных импульсов длительностью T . Структурная схема системы управления показана на рис. 2.1, a . Следует отметить, что выходной сигнал фиксатора нулевого порядка, включенного на входе системы, является ступенчатой аппроксимацией непрерывного сигнала, и увеличение частоты квантования приводит к увеличению точности этой аппроксимации. Существенным условием правильной работы системы на рис. 2.1, a является синхронное и синфазное замыкание мгновенного ключа в период T относительно мгновенного ключа

с периодом h в замкнутом контуре системы, что обеспечивается устройством синхронизации.

Рассмотрим временные процессы при обработке системой на рис. 2.1, а произвольного входного воздействия $u(t)$. Эти процессы показаны на рис. 2.2. Входной сигнал $u(t)$ квантуется по времени идеальным квантователем (мгновенным ключом), который замыкается и размыкается мгновенно через каждые T секунд. На выходе такого квантователя образуются мгновенные импульсы (δ -функции), площади которых u_n^* равны входному

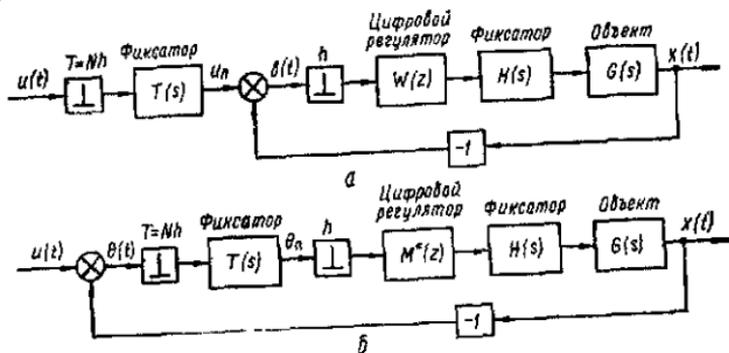


Рис. 2.1

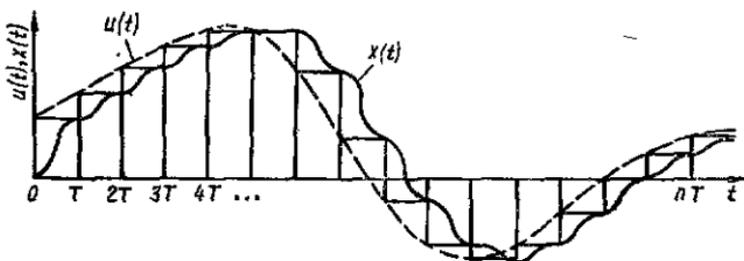


Рис. 2.2

сигналу в соответствующие моменты времени

$$u_n^* = u(t) \text{ при } t = nT, n = 0, 1, 2, \dots$$

Фиксатор нулевого порядка преобразует последовательность мгновенных импульсов в последовательность прямоугольных импульсов длительностью T , амплитуды которых u_n равны входному сигналу в соответствующие моменты времени

$$u_n = u(t) \text{ при } t = nT, n = 0, 1, 2, \dots$$

Система на рис. 2.1, а следующим образом обрабатывает последовательность сомкнутых между собой импульсов длительностью T амплитудой $u_n = u(nT)$: в промежутке времени $0 < t \leq T$ система обрабатывает ступенчатое входное воздействие величиной $u(0)$, и в момент $t = T$ на ее выходе устанавливается величина $x(T) = u(0)$; в промежутке времени $T < t < 2T$ система обработает ступенчатое воздействие величиной

$\Theta(T) = u(T) - x(T) = u(T) - u(0)$, и в момент $t = 2T$ на ее выходе устанавливается величина $x(2T) = u(T)$; в промежуток времени $2T < t \leq 3T$ система обработает ступенчатое воздействие величиной $\Theta(2T) = u(2T) - x(2T) = u(2T) - u(T)$, и в момент $t = 3T$ на ее выходе устанавливается величина $x(3T) = u(2T)$ и т. д. В промежутке времени $nT < t \leq (n+1)T$ система обрабатывает ступенчатое воздействие величиной $\Theta(nT) = u(nT) - x(nT) = u(nT) - u[(n-1)T]$, и в момент времени $t = (n+1)T$ на ее выходе устанавливается величина $x[(n+1)T] = u(nT)$.

Если задающее воздействие $u(t)$ является гармоническим $u(t) = U_{\max} \sin \omega_{\text{вх}} t$, то максимальная ошибка при обработке системы задающего воздействия

$$\Theta_{\max} = U_{\max} \sin \omega_{\text{вх}} T \approx U_{\max} \omega_{\text{вх}} T.$$

Амплитуда U_{\max} и частота $\omega_{\text{вх}} = 2\pi f_{\text{вх}}$ задающего воздействия, а также максимальная ошибка Θ_{\max} обычно заданы. Учитывая, что $T = Nh$, где N — порядок линейного дифференциального уравнения объекта регулирования, находим условие, из которого можно определить шаг квантования h , с которым работает оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор:

$$h \leq \frac{\Theta_{\max}}{U_{\max}} \frac{1}{\omega_{\text{вх}} N}. \quad (2.1)$$

При произвольном задающем воздействии $u(t)$, которое изменяется с максимальной скоростью ω_{\max} и максимальным ускорением ε_{\max} , для определения максимальной ошибки Θ_{\max} удобно рассматривать эквивалентное гармоническое задающее воздействие $u_{\varepsilon}(t) = U_{\max \varepsilon} \sin \omega_{\text{вх. } \varepsilon} t$ с заданными максимальными скоростью и ускорением [12]:

$$\omega_{\varepsilon} = U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon} = \omega_{\max}; \quad \varepsilon_{\varepsilon} = U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon}^2 = \varepsilon_{\max}.$$

Из последних двух равенств найдем параметры эквивалентного гармонического воздействия

$$\omega_{\text{вх. } \varepsilon} = \varepsilon_{\max} / \omega_{\max}; \quad U_{\max \varepsilon} = \omega_{\max}^2 / \varepsilon_{\max}.$$

Определим максимальную ошибку при обработке эквивалентного гармонического задающего воздействия

$$\Theta_{\max} = U_{\max \varepsilon} \sin \omega_{\text{вх. } \varepsilon} T \approx U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon} T.$$

Откуда

$$h \leq \frac{\Theta_{\max}}{U_{\max \varepsilon}} \frac{1}{\omega_{\text{вх. } \varepsilon} N}, \quad (2.2)$$

Определяя из условий (2.1) или (2.2) шаг квантования h , с которым работает оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор в системе на рис. 2.1, а, обеспечивают максимальную динамическую ошибку в системе при обработке соответствующего задающего воздействия, не больше заданной.

Стремление уменьшить максимальную динамическую ошибку Θ_{\max} приводит к необходимости уменьшения шага квантования h , к увеличению общего коэффициента усиления разомкнутого контура системы $K_0\alpha$ и как следствие к насыщению усилительного тракта. Система переходит в нелинейный режим. Можно найти минимальный шаг квантования h , при котором система еще будет работать в линейном режиме. Минимальному шагу квантования h соответствует ошибка

$$(\Theta_{\max})_{\min} = U_{\max} \varepsilon \omega_{\text{вх. } \varepsilon} N h_{\min} \quad (2.3)$$

Структурную схему системы управления на рис. 2.1, а можно замесить эквивалентной структурной схемой на рис. 2.1, б, в которой оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор описывается новой передаточной функцией $M^*(z) = M(z)/(1+z^{-1} + \dots + z^{-N+1})$, где $M(z)$ — полином в числителе передаточной функции $W(z)$. Цифровой регулятор в передаточной функции $M^*(z)$ образует на входе объекта регулирования в эквивалентной системе на рис. 2.1, б точно такую же последовательность импульсов управления, как и цифровой регулятор с передаточной функцией $W(z)$ в системе на рис. 2.1, а. Существенным является то, что в системе на рис. 2.1, б входное воздействие $u(t)$ может быть неэлектрической величиной, а элемент сравнения — преобразователем неэлектрической величины в электрическую (например, угла поворота в напряжение). Формулы (2.1) — (2.3) справедливы и для системы на рис. 2.1, б.

Рассмотрим пример. Пусть на вход системы на рис. 2.1, б поступает произвольное задающее воздействие, которое изменяется с максимальной скоростью $\omega_{\max} = 10^\circ \text{ с}^{-1}$ и максимальным ускорением $\varepsilon_{\max} = 5^\circ \text{ с}^{-2}$. Тогда параметры эквивалентного гармонического воздействия

$$\omega_{\text{вх. } \varepsilon} = \varepsilon_{\max} / \omega_{\max} = 0,5 \text{ с}^{-1}; \quad U_{\text{вх. } \varepsilon} = \omega_{\max}^2 / \varepsilon_{\max} = 20^\circ.$$

Допустим, что динамическая ошибка слежения должна быть не более $0,5^\circ$, а объект регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка ($N = 2$). Тогда, согласно выражению (2.2), шаг квантования h , с которым работает оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор, должен быть не более чем

$$h \leq \frac{\Theta_{\max}}{U_{\text{вх. } \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon} N} = 0,025 \text{ с.}$$

Пусть объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$, где частота сопряжения $b = 2 \text{ с}^{-1}$. При $h = 0,025 \text{ с}$ необходимо обеспечить общий коэффициент усиления разомкнутого контура системы на рис. 2.1, б, равный (см. табл. 1.1, п. 2),

$$K_0\alpha = \frac{b}{h(1 - e^{-bh})} \approx 1640,3 \text{ с}^{-2}.$$

Итак, в системе на рис. 2.1, а (или в эквивалентной системе рис. 2.1, б), в отличие от системы на рис. 1.1, а, можно получить высокое качество при произвольных входных воздействиях и при

сохраняет оптимальные переходные процессы в замкнутом контуре регулирования. Уменьшение противоречия между высоким качеством при произвольных входных воздействиях и оптимальностью переходных процессов на ступенчатые воздействия достигается дополнительным введением в системы на рис. 2.1, а и б мгновенного ключа с периодом замыкания $T = Nh$ и соответствующего фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией

$$T(s) = (1 - e^{-Ts})/s. \quad (2.4)$$

Рассмотрим характеристики такого фиксатора, которые необходимы при частотном анализе систем. Заменяя s на $j\omega$ в последнем выражении, получаем

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j2\omega} = \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} = \frac{2\pi}{\omega_T} \frac{\sin \pi(\omega/\omega_T)}{\pi(\omega/\omega_T)} e^{-j(\omega/\omega_T)}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где ω_T — частота квантования ($\omega_T = 2\pi/T$).

Фиксатор нулевого порядка обладает свойствами низкочастотного фильтра. В отличие от идеального фильтра ампли-

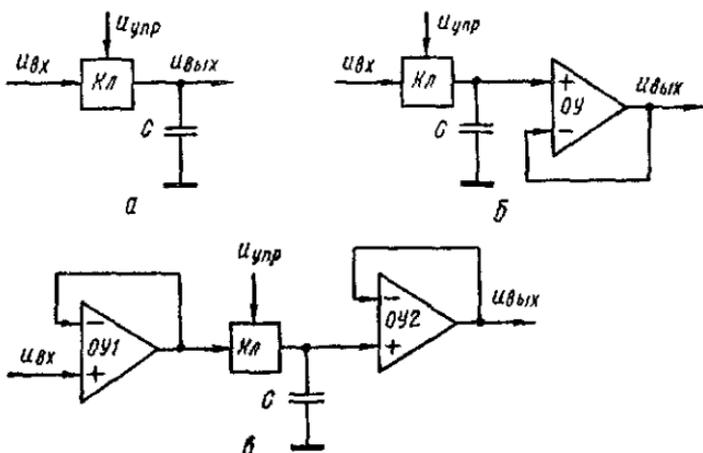


Рис. 2.3

тудная характеристика фиксатора обращается в нуль при $\omega = \omega_T$, а при $\omega = \omega_T/2$ модуль $T(j\omega)$ равен 0,636 [38].

Мгновенный ключ в периодом замыкания $T = Nh$ и соответствующий фиксатор нулевого порядка представляет собой идеальное устройство выборки и хранения (УВХ). Реализовать такое устройство можно с помощью ключа $Kл$, размыкание и замыкание которого определяются управляющим сигналом $u_{упр}$, и конденсатора C (рис. 2.3, а). Когда ключ замкнут, выходной сигнал УВХ изменяется в соответствии с входным сигналом; когда ключ разомкнут, выходной сигнал зависит от напряжения на конденсаторе. На практике выходной сигнал УВХ отличается

от идеального вследствие несовершенства устройства и его погрешности.

К основным характеристикам УВХ относятся. время выборки — интервал от момента поступления команды на выборку до момента, когда выходной сигнал станет равным входному с погрешностью $\pm 1\%$; апертурное время — интервал от момента поступления команды на фиксацию до момента, когда ключ разомкнется (обычно около 10 нс); время установления — период, необходимый для затухания колебаний в режиме фиксации до некоторой величины (это время может быть до нескольких микросекунд); спад сигнала — медленное уменьшение выходного напряжения УВХ из-за токов утечки ключа в течение времени фиксации. Спад сигнала можно уменьшить, если на выходе УВХ

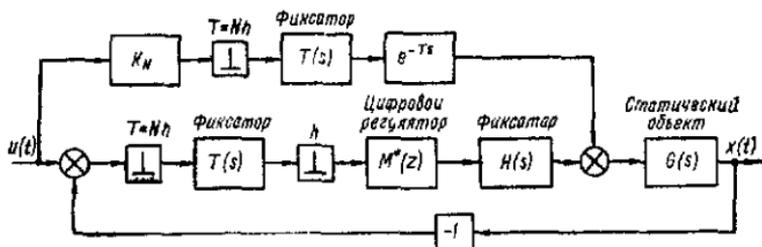


Рис. 2.4

включить усилитель с высоким сопротивлением (рис. 2.3, б). Часто усилитель включают на входе УВХ для согласования с источником сигнала (рис. 2.3, в). Различные варианты практических схем УВХ и процессы в реальных УВХ описаны в работах [1; 2; 33].

Структурная схема системы управления, имеющая статический объект регулирования, изображена на рис. 2.4. Для уяснения ее работы рассмотрим конкретный пример. Пусть система на рис. 1.1, а имеет статический объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha [(s+a)(s+b)]^{-1}$ и оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор (см. табл. 1.1, п. 3). Такой регулятор при поступлении на вход системы ступенчатого воздействия величиной U формирует управляющее воздействие на входе объекта регулирования, z -изображение которого имеет вид (см. табл. 1.2, п. 3)

$$UM(z) = UK_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

где $K_0 = ab[\alpha(1-A)(1-B)]^{-1}$; $b_1 = -(A+B)$; $b_2 = AB$.
Разделив числитель на знаменатель, найдем

$$UM(z) = UM'(z) + U \frac{ab}{\alpha} \sum_{i=2}^{\infty} z^{-i},$$

где $M'(z) = K_0 + (1 + b_1) K_0 z^{-1}$.

Таким образом, цифровой регулятор на входе объекта регулирования (на выходе фиксатора) формирует за время $T = Nh$, $N = 2$, в переходном режиме два сомкнутых между собой управляющих импульса длительностью h каждый с амплитуда-

ми $m_0 = K_0 U$ и $m_1 = (1 + b_1) K_0 U$ и в установившемся режиме постоянную «подставку» $m_N = K_N U$, где $K_N = ab/\alpha$ (см. рис. 1.4). При сформированной «подставке» на входах интеграторов в схеме аналогового моделирования объекта регулирования устанавливаются нулевые сигналы.

Рассмотрим структурную схему системы на рис. 2.4. Цифровой регулятор имеет передаточную функцию $M^*(z) = M'(z)/(1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1})$ и формирует управляющие импульсы в переходных режимах. Основной канал в этой системе аналогичен системе на рис. 2.1, б и также обрабатывает произвольное входное воздействие в переходных режимах. Дополнительный канал, состоящий из масштабирующего усилителя с коэффициентом передачи K_N , устройства выборки и хранения (мгновенный ключ с шагом квантования $T = Nh$ и соответствующий фиксатор нулевого порядка) и блока задержки на время T , служит для формирования «подставок». За счет дополнительного канала система на рис. 2.4 со статическим объектом регулирования обрабатывает произвольное входное воздействие с такими же динамическими ошибками, как и системы на рис. 2.1, а, б с астатическими объектами регулирования (при одинаковых порядках уравнений динамики объектов N). Недостатком структурной схемы на рис. 2.4 является то, что входное воздействие $u(t)$ должно быть электрической величиной.

Таким образом, рассмотрены структурные схемы систем управления, работающих при произвольных входных воздействиях и имеющих в своем составе цифровые регуляторы, оптимальные для ступенчатых входных воздействий. Динамическая точность обработки произвольных входных воздействий таких систем определяется максимальной ошибкой, которую можно вычислить по формуле (2.3). Для повышения динамической точности систем необходимо уменьшить шаг квантования h , что приводит к необходимости использовать большие коэффициенты усиления разомкнутого контура систем $K_0 \alpha$ и, как следствие, к насыщению усилительного тракта. Другими словами, шаг квантования h можно уменьшать лишь до определенного предела.

Существенное повышение динамической точности можно достичь в системах, работающих на произвольные входные воздействия и имеющих в своем составе цифровые регуляторы, оптимальные для линейно-изменяющихся входных воздействий.

Линейно-изменяющиеся воздействия на входе систем управления в интервалах $nT < t \leq (n+1)T$ можно образовать из произвольного входного воздействия $u(t)$ путем квантования этого воздействия в моменты nT , $n = 0, 1, 2, \dots$, и линейного экстраполирования на каждом участке $nT < t \leq (n+1)T$. При этом

$$u_s(t) = u_n + \frac{\Delta u_n}{T} (t - nT), \quad nT < t \leq (n+1)T,$$

где $u_n \equiv u(nT)$; $\Delta u_n = u[(n+1)T] - u(nT)$.

Таким образом, для образования линейно-изменяющихся воздействий в интервалах $nT < t \leq (n+1)T$ необходимо измерять среднюю скорость

$$\sigma_n = \frac{\Delta u_n}{T} = \frac{u[(n+1)T] - u(nT)}{T}$$

на этих интервалах, что практически невозможно, так как прямая разность Δu_n при $t < (n+1)T$ неизвестна. Поэтому измеряют среднюю скорость на предыдущем интервале

$$\sigma_{n-1} = \frac{\Delta u_{n-1}}{T} = \frac{u(nT) - u[(n-1)T]}{T} \quad (2.6)$$

и в результате экстраполирования получают

$$u_0(t) = u_n + \sigma_{n-1}(t - nT), \quad nT < t \leq (n+1)T, \quad (2.7)$$

как это показано на рис. 2.5.

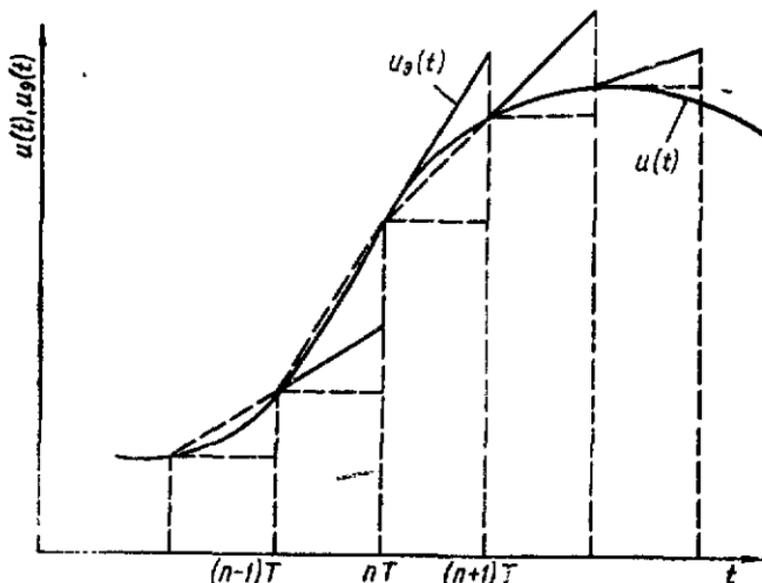


Рис. 2.5

Экстраполятор (фиксатор) первого порядка имеет передаточную функцию

$$T_1(s) = \frac{1 + Ts}{T} \frac{(1 - e^{-Ts})^2}{s^2}. \quad (2.8)$$

Подставляя в уравнение (2.8) $s = j\omega$ и $T = 2\pi/\omega_T$, получаем частотную характеристику экстраполятора

$$T_1(j\omega) = \frac{1 + j2\pi\omega/\omega_T}{2\pi/\omega_T} \frac{4(\sin \pi\omega/\omega_T)^2}{\omega^2 e^{j2\pi\omega/\omega_T}}.$$

Фазовая и амплитудная частотные характеристики экстраполятора определяются выражениями [38]

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\pi\omega}{\omega_T} - \frac{2\pi\omega}{\omega_T};$$

$$|T_1(j\omega)| = \frac{2\pi}{\omega_T} \left(1 + \frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_T^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \pi\omega/\omega_T}{\pi\omega/\omega_T}\right)^2. \quad (2.9)$$

Рассмотрим систему на рис. 1.1, а с оптимальным цифровым регулятором для линейно-изменяющегося входного воздействия. Пусть система имеет объект регулирования в астатическом 2-го порядка, динамика которого описывается линейным дифференциальным уравнением N -го порядка. Тогда при подаче на вход системы линейно-изменяющегося воздействия $u(t) = U + \sigma t$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях переходные процессы в системе заканчиваются за время $T = Nh$, и после окончания переходных процессов на входе последнего интегратора в слеме аналогового моделирования объекта регулирования устанавли-

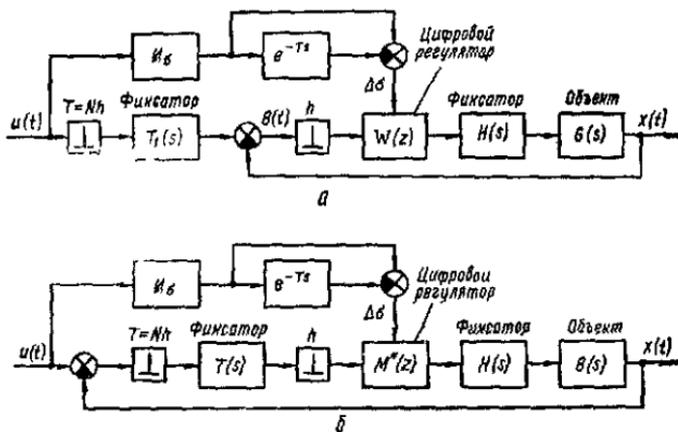


Рис. 26

вается величина, равная σ , а на входах всех остальных интеграторов нулевые сигналы.

Предположим, что выходное воздействие $u(t)$ является электрической величиной (например, напряжением). Включим на вход системы дополнительно мгновенный ключ с периодом замыкания $T = Nh$ и фиксатор первого порядка в передаточной функции $T_1(s)$. Кроме того, будем измерять среднюю скорость входного воздействия измерителем скорости I_σ на каждом интервале $(n-1)T < t \leq nT$ и на интервале $nT < t \leq (n+1)T$ подавать эту скорость на оптимальный для линейно-изменяющегося входного воздействия цифровой регулятор для перестройки его коэффициентов. Структурная схема системы управления для этого случая показана на рис. 26, а. Следует отметить, что выходной сигнал фиксатора первого порядка, включенного на входе системы, является линейной аппроксимацией непрерывного сигнала, и увеличение частоты квантования приводит к увеличению точности этой аппроксимации. Существенным условием правильной работы системы на рис. 26, а является синхронное и синфазное замыкания мгновенного ключа с периодом T относительно мгновенного ключа с периодом h в замкнутом контуре системы, что обеспечивается устройством синхронизации.

Рассмотрим временные процессы при обработке системой на рис. 26, а произвольного входного воздействия $u(t)$. Эти процессы показаны на рис. 2.7. Пусть система в интервале

$0 < t < T$ обрабатывает воздействие $0ab$ и одновременно измеряет скорость входного воздействия — наклон ab . Тогда в интервале $T < t < 2T$ система обрабатывает воздействие $бвг$ и измеряет скорость входного воздействия — наклон $вд$. После выхода в точку $г$ система обрабатывает на интервале $2T < t < 3T$ воздействие $гдз$ и измеряет скорость входного воздействия — наклон $дз$. После выхода в точку $з$ система обрабатывает на интервале $3T < t < 4T$ скачок $зж$, наклон $жз$ и измеряет скорость входного воздействия — наклон $жи$. Наконец,

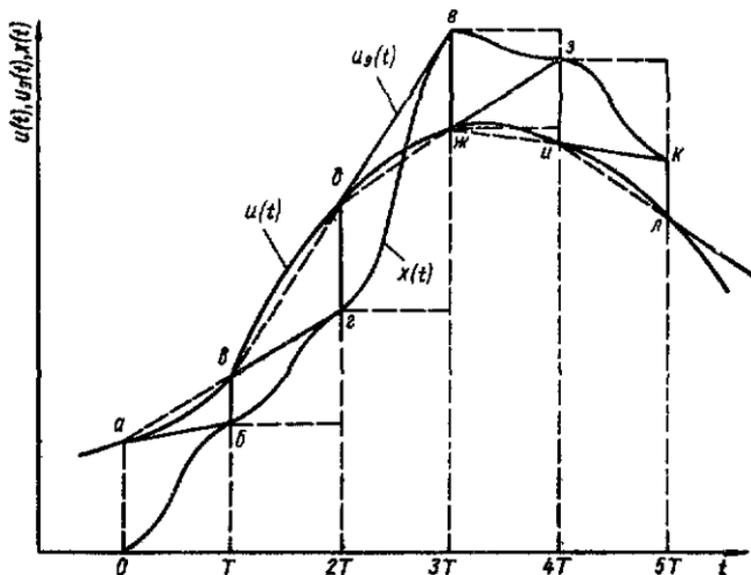


Рис. 2.7

после выхода в точку $з$ система обрабатывает на интервале $4T < t < 5T$ воздействие $вик$ и измеряет скорость входного воздействия $ил$ и т. д.

На каждом интервале $nT < t < (n + 1)T$ с выхода экстраполятора на вход элемента сравнения в системе на рис. 2.6, а поступает линейно-изменяющееся воздействие, скорость которого определяется средней скоростью σ_{n-1} на предыдущем интервале, и напряжение, пропорциональное скорости, подается на цифровой регулятор для настройки коэффициентов передаточной функции $W(z)$. Таким образом, переходные процессы в замкнутом контуре системы на рис. 2.6, а на каждом интервале оптимальные и заканчиваются за время $T = Nh$. После окончания переходных процессов на интервале $nT < t < (n + 1)T$ на входе последнего интегратора в схеме аналогового моделирования объекта регулирования в момент $t = (n + 1)T$ устанавливается величина, равная σ_{n-1} . Если скорость входного воздействия меняется от интервала к интервалу (как показано на рис. 2.7), то на каждом новом интервале для установки нового значения скорости добавляется соответствующее приращение скорости.

Таким образом, если скорость входного воздействия меняется от интервала к интервалу, то для перестройки коэффициентов цифрового регулятора подается напряжение, пропорциональное

приращению скорости на новом интервале относительно предыдущего интервала (для этого в структурных схемах рис. 2.6 после измерителя скорости включены блок задержки на время T и вычитающее устройство, с выхода которого разность скоростей поступает на второй вход цифрового регулятора).

Рассмотрим систему рис. 2.6, а с объектом регулирования, имеющим передаточную функцию $G(s) = \alpha/s^2$. Схема аналогового моделирования объекта изображена на рис. 1.3, а. Допустим, что после окончания переходных процессов в системе в интервале $(n-1)T < t \leq nT$ на входе последнего интегратора в схеме аналогового моделирования объекта регулирования устанавливается величина, равная σ_1 , а на входах всех остальных интеграторов — нулевые сигналы. В интервале $nT < t \leq (n+1)T$ на вход замкнутого контура системы поступает величина $u(t) = U + \sigma_2 t$. Определим передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего оптимальный переходной процесс в этом интервале,

$$\begin{aligned} v^T(0^+) &= |0; \sigma_1; m_0|; \\ v^T(h^+) &= \left\{ \sigma_1 h + \frac{1}{2} \alpha h^2 m_0; \sigma_1 + \alpha h m_0; m_1 \right\}; \\ v(2h^+) &= \left\{ \begin{array}{l} 2h\sigma_1 + \frac{3}{2} \alpha h^2 m_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 m_1 \\ \sigma_1 + \alpha h m_0 + \alpha h m_1 \\ m_2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения запишем условия, при которых переходные процессы заканчиваются за время $T = 2h$,

$$\left. \begin{aligned} x_1(2h^+) &= 2h\sigma_1 + \frac{3}{2} \alpha h^2 m_0 + \frac{1}{2} \alpha h^2 m_1 = U + 2h\sigma_2; \\ x_2(2h^+) &= \sigma_1 + \alpha h m_0 + \alpha h m_1 = \sigma_2; u'_2(2h^+) = m_2 = 0. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Из уравнений (2.10) находим

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{\alpha h^2} U + \frac{3}{2\alpha h} \Delta\sigma; \\ m_1 &= -\frac{1}{\alpha h^2} U - \frac{1}{2\alpha h} \Delta\sigma; \\ \Delta\sigma &= \sigma_2 - \sigma_1. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Нетрудно заметить, что передаточная функция цифрового регулятора совпадает с передаточной функцией, записанной в табл. 1.4, п. 1, но коэффициенты отличаются тем, что вместо скорости σ в них фигурирует приращение скорости $\Delta\sigma$.

Структурную схему системы управления на рис. 2.6, а можно заменить эквивалентной структурной схемой (рис. 2.6, б), в которой после мгновенного ключа с шагом квантования $T = Nh$ включен фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией $T(s) = (1 - e^{-Ts})/s$, а оптимальный для линейно-изменяющихся воздействий цифровой регулятор описывается новой передаточной функцией

$$M^*(z) = \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + \dots + m_{N-1} z^{-N+1}}{U(1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1})}.$$

Полином в числителе этой передаточной функции представляет собой полином в числителе передаточной функции $W(z)$ (см. табл. 1.4). Коэффициенты этого полинома перестраиваются в зависимости от приращения средней скорости входного воздействия на каждом интервале $nT < t \leq (n+1)T$. Цифровой регулятор с передаточной функцией $M^*(z)$ образует на входе объекта регулирования в эквивалентной системе на рис. 2.6, б точно такую же последовательность импульсов управления, как и цифровой регулятор с передаточной функцией $W(z)$ в системе на рис. 2.6, а.

Структурные схемы на рис. 2.6 при объектах регулирования с астатизмом первого порядка преобразуются в более сложные. Рассмотрим системы на рис. 2.6 с объектом регулирования, имеющим передаточную функцию $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$. Схема аналогового моделирования объекта изображена на рис. 1.2. Допустим, что после окончания переходных процессов в системе в интервале $(n-1)T < t \leq nT$ на выходе регулятора (после фиксатора с передаточной функцией $H(s)$) устанавливается величина $u'_2 = \frac{b}{\alpha} \sigma_1$, на входе первого интегратора — $\dot{x}_2 = 0$, на входе второго интегратора — $\dot{x}_1 = \sigma_1$. В интервале $nT < t \leq (n+1)T$ на вход замкнутого контура системы поступает воздействие $u(t) = U + \sigma_2 t$. Определим передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора, обеспечивающего оптимальный переходный процесс в этом интервале. Используя методику определения оптимальных управляющих воздействий, находим условия, при которых переходные процессы заканчиваются за время $T = 2h$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(Pm_0 + Q^2m_0 + Pm_1) + (Q + 2bP + BQ + bQ^2)\sigma_1 &= U + 2h\sigma_2; \\ \alpha Q(Bm_0 + m_1) + (B^2 + bBQ + bQ^2)\sigma_1 &= \sigma_2; \\ m_N &= \frac{b}{\alpha} \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Учитывая выражения для элементов дискретной матрицы перехода $Q = \frac{1}{B}(1-B)$ и $P = \frac{1}{b^2}(bh-1+B)$ из уравнений (2.12), определяем

$$\begin{aligned} m_1 &= -Bm_0 + \frac{\Delta\sigma}{\alpha Q}; \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1; \\ m_0 &= \frac{U}{\alpha(P+Q^2-BP)} + \frac{2hQ-P}{\alpha Q(P+Q^2-BP)} \Delta\sigma. \end{aligned}$$

После несложных преобразований окончательно записываем

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{b}{\alpha h(1-B)} \left[U + \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right) \Delta\sigma \right]; \\ m_1 &= -\frac{bB}{\alpha h(1-B)} \left\{ U + \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)} \right] \Delta\sigma \right\}; \\ m_N &= \frac{b}{\alpha} \sigma_2; \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Нетрудно заметить, что передаточная функция цифрового регулятора совпадает с записанной в табл. 1.4, п. 2, но коэффи-

циенты m_0 и m_1 отличаются тем, что вместо скорости σ в них фигурирует приращение скорости $\Delta\sigma$.

При поступлении на вход систем рис. 2.6 с указанным объектом регулирования воздействия $u(t) = U + \sigma_2 t$ в интервале $nT < t \leq (n+1)T$ регулятор должен сформировать на входе объекта регулирования управляющее воздействие, z -изображение которого имеет вид (см. табл. 1.4, п. 2)

$$M(z) = \frac{m_0 + (m_1 - m_0)z^{-1} + (m_N - m_1)z^{-N}}{1 - z^{-1}} = M'(z) + m_N \sum_{i=2}^{\infty} z^{-i},$$

где $M'(z) = m_0 + m_1 z^{-1}$; $m_N = K_N \sigma_2 = \frac{b}{\alpha} \sigma_2$ ($K_N = b/\alpha$).

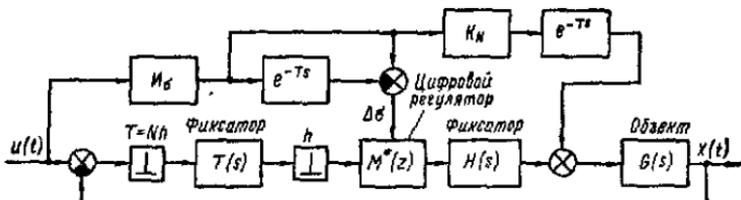


Рис. 2.8

Цифровой регулятор должен сформировать за время $T = Nh$, $N = 2$, в переходном режиме два управляющих импульса (m_0 и m_1) к в установившемся режиме постоянную «подставку» (m_N). Величины m_0 , m_1 и m_N можно определять по формулам (2.13).

Таким образом, структурные схемы рис. 2.6 при объектах регулирования с астатизмом первого порядка преобразуются в более сложные, имеющие дополнительный канал, состоящий из масштабирующего усилителя с коэффициентом передачи K_N и блока задержки на время T . Этот дополнительный канал служит для формирования «подставок». На вход этого канала поступает измеренное на каждом интервале значение скорости σ входного воздействия. Схема на рис. 2.6, б при объекте регулирования с астатизмом первого порядка преобразуется в схему на рис. 2.8.

Передающая функция цифрового регулятора на рис. 2.8

$$\begin{aligned} M^*(z) &= \frac{M'(z)}{U(1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1})} = \\ &= \frac{m_0 + m_1 z^{-1} + \dots + m_{N-1} z^{-N+1}}{U(1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1})}. \end{aligned}$$

Если задающее воздействие $u(t)$ является гармоническим $u(t) = U_{\max} \sin \omega_{\text{вх}} t$, то максимальную ошибку при обработке системами на рис. 2.6 и 2.8 задающего воздействия можно определить из выражения

$$\begin{aligned} \vartheta_{\max} &= 2U_{\max} (1 - \cos \omega_{\text{вх}} T) = 4U_{\max} \sin^2 \frac{\omega_{\text{вх}} T}{2} \approx \\ &\approx U_{\max} \omega_{\text{вх}}^2 T^2. \end{aligned}$$

Амплитуда U_{\max} и частота $\omega_{\text{вх}} = 2\pi f_{\text{вх}}$ задающего воздействия, а также максимальная ошибка Θ_{\max} обычно заданы. Учитывая, что $T = Nh$, где N — порядок линейного дифференциального уравнения объекта регулирования, находим условие, из которого можно определить шаг квантования h , с которым работает оптимальный для линейно-изменяющихся воздействий цифровой регулятор:

$$h \leq \frac{1}{\omega_{\text{вх}} N} \sqrt{\Theta_{\max} / U_{\max}}. \quad (2.14)$$

При произвольном задающем воздействии $u(t)$, которое изменяется с максимальной скоростью ω_{\max} и максимальным ускорением ε_{\max} , для определения максимальной ошибки Θ_{\max} запишем эквивалентное гармоническое задающее воздействие $u_{\varepsilon}(t) = U_{\max \varepsilon} \times \times \sin \omega_{\text{вх. } \varepsilon} t$, где $\omega_{\text{вх. } \varepsilon} = \varepsilon_{\max} / \omega_{\max}$; $U_{\max \varepsilon} = \omega_{\max}^2 / \varepsilon_{\max}$.

Определим максимальную ошибку:

$$\Theta_{\max} \approx U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon}^2 T^2 = \frac{\omega_{\max}^2}{\varepsilon_{\max}} \frac{\varepsilon_{\max}^2}{\omega_{\max}^2} N^2 h^2 = \varepsilon_{\max} N^2 h^2.$$

Из последнего выражения найдем шаг квантования

$$h \leq \frac{1}{\omega_{\text{вх. } \varepsilon} N} \sqrt{\frac{\Theta_{\max}}{U_{\max \varepsilon}}} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\Theta_{\max}}{\varepsilon_{\max}}}. \quad (2.15)$$

Минимальному шагу квантования h соответствует ошибка:

$$(\Theta_{\max})_{\min} = U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon}^2 N^2 h_{\min}^2 = \varepsilon_{\max} N^2 h_{\min}^2. \quad (2.15)$$

Рассмотрим пример. Пусть на вход систем рис. 2.6 и 2.8 поступает произвольное задающее воздействие, которое изменяется с максимальной скоростью $\omega_{\max} = 10^\circ \text{ с}^{-1}$ и максимальным ускорением $\varepsilon_{\max} = 5^\circ \text{ с}^{-2}$. Тогда параметры эквивалентного гармонического воздействия

$$\omega_{\text{вх. } \varepsilon} = \varepsilon_{\max} / \omega_{\max} = 0,5 \text{ с}^{-1}; \quad U_{\max \varepsilon} = \omega_{\max}^2 / \varepsilon_{\max} = 20^\circ.$$

Допустим, что динамическая ошибка слежения Θ_{\max} должна быть не более $0,5^\circ$, а объект регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка ($N = 2$). Тогда по формуле (2.15) получаем

$$h \leq \frac{1}{\omega_{\text{вх. } \varepsilon} N} \sqrt{\frac{\Theta_{\max}}{U_{\max \varepsilon}}} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\Theta_{\max}}{\varepsilon_{\max}}} = 0,158 \text{ с.}$$

Допустим далее, что выбран шаг квантования $h = 0,025 \text{ с}$. При таком шаге квантования

$$\Theta_{\max} \approx U_{\max \varepsilon} \omega_{\text{вх. } \varepsilon}^2 N^2 h^2 = \varepsilon_{\max} N^2 h^2 = 0,0125^\circ.$$

Сравнивая с предыдущим примером, заключаем, что максимальная динамическая ошибка слежения в системах на рис. 2.6

и 2.8, имеющих оптимальный цифровой регулятор для линейно-изменяющихся входных воздействий, меньше максимальной динамической ошибки слежения в системах на рис. 2.1, 2.4, имеющих оптимальный цифровой регулятор для ступенчатых входных воздействий, в $0,5/0,0125 = 40$ раз.

2.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ И НАСТРОЙКА ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Если объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s)$ и при определенных допущениях параметры математической модели и реального объекта идентичны, то можно определить коэффициенты передаточной функции $W(z)$ цифрового регулятора, который обеспечивает при типовых воздействиях оптимальные переходные процессы в системе управления. Например, если реальный объект регулирования описывается передаточной функцией

$$G(s) = K_0 [s(T_0 s + 1)]^{-1} = \alpha [s(s + b)]^{-2}$$

и параметры объекта $\alpha = K_0 T_0^{-1}$ и $b = T_0^{-1}$ определены точно, то цифровой регулятор с передаточной функцией $W(z)$ (см. табл. 1.1, п. 2), при воздействии типа ступенчатой функции величиной U на входе системы управления (см. рис. 1.1, а) и нулевых начальных условиях обеспечит переходной процесс на выходе системы без перерегулирования за конечное и минимальное ($T = 2h$) время. При этом управляющее воздействие на входе объекта регулирования (на выходе фиксатора нулевого порядка) представляется двумя сомкнутыми между собой импульсами длительностью h и амплитудами

$$m_0 = K_0 \Theta_0 \quad \text{и} \quad m_1 = -K'_0 \Theta_0 = -B m_0,$$

где $K_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)}$; $K'_0 = BK_0$; $B = e^{-bh}$; Θ_0 — скачок ошибки на входе регулятора, равный скачку входного воздействия на первом интервале регулирования длительностью T .

Если параметры реального объекта регулирования определены неточно или изменяются в процессе эксплуатации, то цифровой регулятор не обеспечивает оптимальные переходные процессы. В такой ситуации необходимо определять параметры объекта регулирования (уточнять параметры математической модели объекта) и устанавливать параметры регулятора, соответствующие измеренным параметрам объекта [24].

Текущие значения координат x_i в схеме аналогового моделирования объекта (вид переходных процессов) находятся в строгой функциональной зависимости от параметров объекта регулирования, поэтому реальные параметры объекта регулирования можно определять по значениям x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, в фиксированные моменты времени.

Допустим, что регулятор в системе на рис. 1.1, а рассчитан для параметров α и b объекта регулирования с передаточной функцией (см. табл. 1.1, п. 2) и формирует при ступенчатом воздействии на входе системы указанные выше управляющие воздействия m_0 и m_1 на входе объекта регулирования. Пусть дей-

ствительная постоянная времени объекта отличается от расчетной T_0 и равна \hat{T}_0 . Тогда действительные параметры объекта $\hat{\alpha} = K_0 \hat{T}_0^{-1}$ и $\hat{b} = \hat{T}_0^{-1}$ также отличаются от расчетных, и при подаче на вход объекта рассчитанных воздействий m_0 и m_1 на выходе объекта в фиксированные моменты времени будут величины

$$x_1(h) = \hat{\alpha} \hat{P} m_0, \quad (2.17)$$

$$\text{где } \hat{P} = \frac{\hat{b}h - 1 + \hat{B}}{\hat{b}^2}; \quad \hat{B} = e^{-\hat{b}h};$$

$$x_1(2h) = \hat{\alpha} (\hat{P} + \hat{Q}^2) m_0 + \hat{\alpha} \hat{P} m_1, \quad (2.18)$$

$$\text{где } \hat{Q} = (1 - \hat{B})/\hat{b}.$$

Из формулы (2.17) находим

$$\hat{b} = \frac{1 - \hat{B}}{h - \frac{x_1(h) \hat{b}}{m_0 \hat{\alpha}}}, \quad (2.19)$$

а из формулы (2.18)

$$\hat{b} = \frac{(1 - \hat{B})^2 m_0 \hat{\alpha}}{[x_1(2h) - x_1(h)(1 - \hat{B})] \hat{b}}. \quad (2.20)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $\hat{\alpha}/\hat{b} = K_0 = \alpha/h$, и приравнивая правые части выражений (2.19) и (2.20), определяем

$$\hat{b} = -\frac{1}{h} \ln \left\{ 1 - \frac{[x_1(2h) - x_1(h)(1 - \hat{B})] \hat{b}}{\alpha h m_0 - b x_1(h)} \right\}; \quad (2.21)$$

$$\hat{\alpha} = K_0 \hat{b}. \quad (2.22)$$

Таким образом, зная расчетные параметры α и b (а значит, m_0 и B) и реальную выходную координату объекта в моменты времени $t = h$ и $t = 2h$, можно определить реальные параметры объекта регулирования \hat{b} и $\hat{\alpha}$ (при условии, что неизвестной является только постоянная времени $\hat{T}_0 = \hat{b}^{-1}$).

На основании измеренных реальных параметров \hat{b} и $\hat{\alpha}$ объекта регулирования можно сформировать новые, соответствующие реальным параметрам управляющие воздействия на объект регулирования

$$\hat{m}_0 = \hat{K}_0 \Theta_n; \quad \hat{m}_1 = -\hat{K}'_0 \Theta_n = -\hat{B} \hat{m}_0, \quad (2.23)$$

где $K_0 = \frac{\hat{b}}{\hat{\alpha} h (1 - \hat{B})}$; $\hat{K}'_0 = \hat{B} \hat{K}_0$; $\hat{B} = e^{-\hat{b}h}$; Θ_n — скачки ошибки на входе регулятора в интервалах регулирования длительностью T , $n = 1, 2, 3, \dots$

При обработке системой на рис. 1.1, а произвольного входного воздействия, аппроксимированного ступенчатыми функциями, недостаточно в интервале $T = N\hat{h}$ осуществить идентификацию параметров объекта регулирования и на основе реаль-

ных параметров $\hat{\alpha}$ и \hat{b} сформировать новые управляющие воздействия \hat{m}_0 и \hat{m}_1 на следующем интервале длительностью $T = Nh$. Необходимо еще обеспечить нулевые начальные условия для следующего интервала. Для рассматриваемого примера начальные условия запишем в виде

$$x_2(2h) = 0. \quad (2.24)$$

Для идентификации параметров объекта, формирования управляющих воздействий на объект, отвечающих идентифицированным параметрам, и обеспечения нулевых начальных условий в одном интервале $T = Nh$, необходимо делить этот интервал на два подынтервала: 1) идентификации; 2) обеспечения нулевых начальных условий. Для рассматриваемой системы с объектом регулирования второго порядка подынтервал идентификации может занимать шаг квантования h . Используя значения координат $x_1(h)$ и $x_2(h)$, можно идентифицировать параметры объекта регулирования в момент времени $t = h$:

$$x_2(h) = \hat{\alpha} \hat{Q} m_0 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} (1 - \hat{B}) m_0. \quad (2.25)$$

Учитывая, что $\hat{\alpha}/\hat{b} = \alpha/b = K_0$, и используя выражение (2.19), запишем

$$\hat{b} = \frac{x_2(h) \frac{b}{\alpha}}{h - \frac{x_1(h) \frac{b}{\alpha}}{m_0}} = \frac{x_2(h)}{K_0 m_0 h - x_1(h)}; \quad \hat{\alpha} = K_0 \hat{b}. \quad (2.26)$$

Из выражения (2.25) можно найти

$$\hat{B} = e^{-\hat{b}h} = 1 - \frac{x_2(h)}{K_0 m_0}.$$

Откуда

$$\hat{b} = \frac{1}{h} \ln \left[1 - \frac{x_2(h)}{K_0 m_0} \right]; \quad \hat{\alpha} = K_0 \hat{b}. \quad (2.27)$$

Далее определим управляющее воздействие на объект регулирования μ_1 , которое обеспечивает выполнение условия (2.24)

$$x_2(2h) = \hat{\alpha} \hat{Q} \hat{B} m_0 + \hat{\alpha} \hat{Q} \mu_1 = 0.$$

Получаем простое соотношение

$$\mu_1 = -\hat{B} m_0. \quad (2.28)$$

Можно также записать

$$\mu_1 = \frac{\hat{B}}{B} m_1; \quad \mu_1 = m_1 + (B - \hat{B}) m_0.$$

Таким образом, для рассматриваемой системы получаем следующий алгоритм идентификации параметров объекта регулирования и настройки параметров цифрового регулятора в интервале $T = Nh$ ($N = 2$). В момент времени $t = h$ измеряют координаты

$x_1(h)$ и $x_2(h)$ и выполняют идентификацию параметров объекта $\hat{\alpha}$ и \hat{b} по формулам (2.26) или измеряют только координату $x_2(h)$, а параметры идентифицируют по формулам (2.27); одновременно находят значения \hat{B} , \hat{K}_0 и \hat{K}_0' . В подынтервале $h < t \leq 2h$ на объект регулирования подается управляющее воздействие μ_1 , которое в момент $t = 2h$ обеспечивает нулевые начальные условия. На новом (следующем) интервале регулирования $T = Nh$ регулятор формирует воздействия \hat{m}_0 и \hat{m}_1 .

Если для вычисления параметров \hat{B} , \hat{K}_0 , \hat{K}_0' и μ_1 по значениям \hat{b} и $\hat{\alpha}$ требуется некоторое время, то идентификацию параметров $\hat{\alpha}$ и \hat{b} следует выполнить за более короткое, чем h время. Например, можно измерить координаты $x_1(h/2)$ и $x_2(h/2)$

$$x_1(h/2) = \hat{\alpha} \hat{P} \left(\frac{h}{2} \right) m_0, \quad (2.29)$$

где

$$\hat{P}(h/2) = \frac{\hat{b} \frac{h}{2} - 1 + \sqrt{\hat{B}}}{\hat{b}^2} = \frac{1}{\hat{b}} \left(\frac{h}{2} - \frac{1 - \sqrt{\hat{B}}}{\hat{b}} \right); \quad (2.30)$$

$$x_2(h/2) = \hat{\alpha} \hat{Q} \left(\frac{h}{2} \right) m_0,$$

где $\hat{Q}(h/2) = (1 - \sqrt{\hat{B}})/\hat{b}$.

Используя формулы (2.29) и (2.30), находим

$$\hat{b} = \frac{x_2(h/2)}{K_0 m_0 h/2 - x_1(h/2)}; \quad \hat{\alpha} = K_0 \hat{b}. \quad (2.31)$$

Из выражения (2.30) можно найти

$$\sqrt{\hat{B}} = e^{-\hat{b}h/2} = 1 - \frac{x_2(h/2)}{K_0 m_0}.$$

Откуда

$$\hat{b} = -\frac{2}{h} \ln \left[1 - \frac{x_2(h/2)}{K_0 m_0} \right]; \quad \hat{\alpha} = K_0 \hat{b}. \quad (2.32)$$

Технически более удобно измерять одну координату в двух точках, например $x_1(h/2)$ и $x_1(h)$, при этом $x_1(h/2)$ можно вычислить по формуле (2.29), а $x_1(h)$ — по формуле (2.17). Определяя из этих формул величины B и приравнявая их, находим

$$\hat{b} = m_0 K_0 \frac{2x_1(h/2) - x_1(h)}{\left[\frac{m_0 K_0 h}{2} - x_1(h/2) \right]^2}. \quad (2.33)$$

Когда реальная величина K_0 совпадает с расчетной, коэффициент $\hat{\alpha}$ определяется как $K_0 \hat{b}$.

Предположим, что оба реальных параметра объекта (\hat{T}_0 и \hat{K}_0) отличаются от расчетных. В этом случае кроме идентификации параметра $\hat{T}_0 = \hat{b}^{-1}$ необходимо идентифицировать параметр \hat{K}_0 (тогда коэффициент $\hat{\alpha}$ определяется как $\hat{K}_0 \hat{b}$) или параметр α

(тогда коэффициент \hat{K}_v определяется как $\hat{\alpha}/\hat{b}$). Если для идентификации одного параметра \hat{b} требовались два измерения координат объекта (см. табл. 2.1), то для идентификации двух параметров (\hat{b} и \hat{K}_v) требуются три измерения координат объекта.

Пусть измеряют величины $x_1(h)$, $x_2(h)$, $x_1(2h)$. Тогда, используя формулы (2.17) и (2.25), находим

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} = \hat{K}_v = \frac{x_1(h)}{m_0} \frac{\hat{b}}{\hat{b}h - 1 + \hat{B}} = \frac{x_2(h)}{m_0(1 - \hat{B})}. \quad (2.34)$$

Из формул (2.17) и (2.18) вычисляем

$$x_1(2h) = \hat{\alpha}m_0\hat{P}(1 - B) + \hat{\alpha}m_0\hat{Q}^2 = x_1(h)(1 - B) + \hat{\alpha}m_0 \frac{(1 - \hat{B})^2}{\hat{b}^2}.$$

Откуда

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} = \hat{K}_v = \frac{[x_1(2h) - x_1(h)(1 - B)]\hat{b}}{m_0(1 - \hat{B})^2}. \quad (2.35)$$

Приравняв правые части выражений (2.34) и (2.35), определяем

$$\frac{\hat{b}[x_1(2h) - x_1(h)(1 - B)]}{1 - \hat{B}} = x_2(h). \quad (2.36)$$

Из уравнения (2.34) получаем

$$1 - \hat{B} = \frac{\hat{b}hx_2(h)}{\hat{b}x_1(h) + x_2(h)}. \quad (2.37)$$

Подставляя левую часть выражения (2.37) в уравнение (2.36) и решая полученное уравнение относительно неизвестной величины \hat{b} , находим

$$\hat{b} = \frac{x_2(h)}{x_1(h)} \left[\frac{hx_2(h)}{x_1(2h) - x_1(h)(1 - B)} - 1 \right]. \quad (2.38)$$

Поскольку $\hat{B} = e^{-\hat{b}h}$, то второй неизвестный параметр \hat{K}_v можно найти из выражений (2.34) и (2.35).

Пусть измеряют величины $x_1(h/2)$, $x_2(h/2)$, $x_1(h)$. Тогда, используя формулы (2.29) и (2.30), находим

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} = \hat{K}_v = \frac{x_1(h/2)}{m_0} \frac{\hat{b}}{\hat{b} \frac{h}{2} - 1 + \sqrt{\hat{B}}} = \frac{x_2(h/2)}{m_0(1 - \sqrt{\hat{B}})}. \quad (2.39)$$

Из уравнения (2.39) определяем

$$\sqrt{\hat{B}} = 1 - \frac{\hat{b}}{\hat{K}_v m_0} \left[\frac{\hat{K}_v m_0 h}{2} - x_1\left(\frac{h}{2}\right) \right] = 1 - \frac{x_2(h/2)}{\hat{K}_v m_0}. \quad (2.40)$$

Из уравнения (2.34) запишем

$$1 - \hat{B} = (1 - \sqrt{\hat{B}})(1 + \sqrt{\hat{B}}) = \frac{\hat{b}}{\hat{K}_v} \left[\hat{K}_v h - \frac{x_1(h)}{m_0} \right]. \quad (2.41)$$

Подставляя в выражение (2.41) значения $\sqrt{\widehat{B}}$ из уравнения (2.40), находим

$$\frac{\widehat{b}}{\widehat{K}_0 m_0} \left[\frac{\widehat{K}_0 m_0 h}{2} - x_1(h/2) \right] \left[2 - \frac{x_2(h/2)}{\widehat{K}_0 m_0} \right] = \frac{\widehat{b}}{\widehat{K}_0} \left[\widehat{K}_0 h - \frac{x_1(h)}{m_0} \right]$$

или

$$\frac{2\widehat{K}_0 m_0 - x_2(h/2)}{\widehat{K}_0 m_0} = \frac{2\widehat{K}_0 m_0 h - 2x_1(h)}{\widehat{K}_0 m_0 h - 2x_1(h/2)}. \quad (2.42)$$

Решая уравнение (2.42) относительно \widehat{K}_0 , записываем

$$\widehat{K}_0 = \frac{x_1(h/2) x_2(h/2)}{m_0 \left[2x_1(h/2) + \frac{h}{2} x_2(h/2) - x_1(h) \right]}. \quad (2.43)$$

Второй неизвестный параметр определяем из уравнения (2.40)

$$\widehat{b} = \frac{x_2(h/2)}{\frac{h}{2} \widehat{K}_0 m_0 - x_1(h/2)}. \quad (2.44)$$

Можно идентифицировать параметры объекта регулирования, измеряя координату x_2 в двух точках $x_2(h/2)$ и $x_2(h)$. В этом случае, используя выражения (2.25) и (2.30), находим

$$\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{b}} = \widehat{K}_0 = \frac{x_2(h)}{m_0(1-\widehat{B})} = \frac{x_2(h/2)}{m_0(1-\sqrt{\widehat{B}})}. \quad (2.45)$$

Решая уравнение (2.45), определяем

$$\widehat{B} = \left[\frac{x_2(h)}{x_2(h/2)} - 1 \right]^2. \quad (2.46)$$

Откуда

$$\widehat{b} = -\frac{1}{h} \ln \left[\frac{x_2(h)}{x_2(h/2)} - 1 \right]^2. \quad (2.47)$$

Из выражений (2.45) и (2.46) вычисляем

$$\widehat{K}_0 = \frac{x_2^2(h/2)}{m_0 [2x_2(h/2) - x_2(h)]}. \quad (2.48)$$

Управляющие воздействия на объект регулирования можно формировать непосредственно по измеряемым координатам объекта. Вначале рассмотрим случай, когда только расчетное значение $b = T_0^{-1}$ отличается от реального значения $\widehat{b} = \widehat{T}_0^{-1}$ и может принимать значения большее, равное и меньшее \widehat{b} .

Из выражений (2.25) и (2.28) имеем

$$\widehat{B} = 1 - \frac{x_2(h)}{m_0 K_0}; \quad \mu_1 = \frac{x_2(h)}{K_0} - m_0. \quad (2.49)$$

Из выражений (2.23) получаем

$$\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{hK_v(1-\hat{B})} = \frac{m_0\Theta_n}{hx_2(h)}; \quad \hat{m}_1 = -\hat{B}\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{hK_v} - \hat{m}_0. \quad (2.50)$$

Таким образом, достаточно одного значения $x_2(h)$ измеряемой координаты x_2 , чтобы сформировать управляющие воздействия μ_1 (для обеспечения нулевых начальных условий для последующего интервала $T = Nh$) и управляющие воздействия \hat{m}_0 и \hat{m}_1 (для последующих интервалов регулирования длительностью T).

Из выражений (2.30) и (2.28) имеем

$$\sqrt{\hat{B}} = 1 - \frac{x_2(h/2)}{m_0K_v}; \quad \mu_1 = -\left[1 - \frac{x_2(h/2)}{m_0K_v}\right]^2 m_0. \quad (2.51)$$

Из выражений (2.23) получаем

$$\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{hK_v\left(1 + \frac{\mu_1}{m_0}\right)}; \quad \hat{m}_1 = \frac{\Theta_n}{hK_v\left(1 + \frac{m_0}{\mu_1}\right)} = \frac{\Theta_n}{hK_v} - \hat{m}_0. \quad (2.52)$$

Отсюда видно, что одного значения $x_2(h/2)$ также достаточно, чтобы сформировать управляющие воздействия μ_1 , \hat{m}_0 и \hat{m}_1 . Более сложные выражения для управляющих воздействий на объект регулирования получаются, если использовать значения выходной координаты x_1 . Измеряя $x_1(h/2)$ и $x_1(h)$, по формулам (2.17) и (2.33) находим

$$\hat{B} = 1 - \hat{b} \left[h - \frac{x_1(h)}{m_0K_v} \right] = 1 - \frac{[hm_0K_v - x_1(h)][2x_1(h/2) - x_1(h)]}{\left[\frac{h}{2} m_0K_v - x_1(h/2) \right]^2}.$$

Откуда

$$\mu_1 = -\hat{B}m_0 = -m_0 \left\{ 1 - \frac{[hm_0K_v - x_1(h)][2x_1(h/2) - x_1(h)]}{\left[\frac{h}{2} m_0K_v - x_1(h/2) \right]^2} \right\}. \quad (2.53)$$

Из выражений (2.23) получаем

$$\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{hK_v(1-\hat{B})} = \frac{\Theta_n}{hK_v\left(1 + \frac{\mu_1}{m_0}\right)}; \quad \hat{m}_1 = -\hat{B}\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{hK_v} - \hat{m}_0. \quad (2.54)$$

Из формул (2.29) и (2.33) имеем

$$\hat{B} = \left\{ 1 - \hat{b} \left[\frac{h}{2} - \frac{x_1(h/2)}{m_0K_v} \right] \right\}^2 = \left[1 - \frac{2x_1(h/2) - x_1(h)}{\frac{h}{2} m_0K_v - x_1(h/2)} \right]^2.$$

Откуда

$$\mu_1 = -\hat{B}m_0 = -m_0 \left[1 - \frac{2x_1(h/2) - x_1(h)}{\frac{h}{2} m_0 K_v - x_1(h/2)} \right]^2. \quad (2.55)$$

Выражение (2.55) оказывается проще, чем выражение (2.53).

Рассмотрим случай, когда оба расчетных параметра ($b = T_0^{-1}$ и K_v) отличаются от реальных параметров $\hat{b} = \hat{T}_0^{-1}$ и \hat{K}_v . Определим управляющие воздействия на объект регулирования через измеряемые координаты объекта.

Измеряя координату x_2 в двух точках $x_2(h/2)$ и $x_2(h)$, по формулам (2.28) и (2.46) находим

$$\mu_1 = -m_0 \left[\frac{x_2(h)}{x_2(h/2)} - 1 \right]^2. \quad (2.56)$$

Используя выражения (2.23), (2.46) и (2.48), после несложных преобразований получаем

$$\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{h\hat{K}_v(1-\hat{B})} = \frac{m_0\Theta_n}{hx_2(h)}; \quad \hat{m}_1 = -\hat{B}\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{h\hat{K}_v} - \hat{m}_0. \quad (2.57)$$

Пусть измеряют координаты $x_1(h/2)$, $x_2(h/2)$ и $x_1(h)$. На основании формул (2.28), (2.40) и (2.43) находим

$$\mu_1 = -\hat{B}m_0 = -m_0 \left[\frac{2x_1(h) - hx_2(h/2)}{2x_2(h/2)} - 1 \right]^2. \quad (2.58)$$

Используя выражение (2.23), определяем

$$\begin{aligned} \hat{m}_0 &= \frac{\Theta_n}{h\hat{K}_v(1-\hat{B})} = \frac{\Theta_n}{h\hat{K}_v \left(1 - \frac{\mu_1}{m_0} \right)}; \\ \hat{m}_1 &= -\hat{B}\hat{m}_0 = \frac{\Theta_n}{h\hat{K}_v} - \hat{m}_0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Для объектов регулирования третьего и более высокого порядков формулы идентификации параметров объекта значительно усложняются. Но достаточно просто можно идентифицировать один параметр, например постоянную времени, которая наиболее существенно влияет на качество регулирования. Для этих объектов интервал регулирования T , состоящий из трех шагов явнования h , разбивается на подынтервал идентификация ($0 < t < h$) и два подынтервала обеспечения нулевых условий ($h < t < 3h$).

Если для математической модели реального объекта регулирования только коэффициент усиления определен точно или этот коэффициент в объекте изменяется в процессе эксплуатации, то для его идентификации достаточно измерить только одну координату объекта

Рассмотрим структурные схемы систем управления с настраиваемыми регуляторами. В этих системах объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = K_v[s(T_0s + 1)]^{-1} = \alpha[s(s + b)]^{-1}$, в которой изменяющимся в процессе эксплуатации параметром является коэффициент усиления K_v , или постоянная времени T_0 , или оба эти параметра.

Наиболее просто настроить регулятор, если изменяющимся параметром в объекте регулирования является коэффициент

усиления K_0 в есть возможность измерить скорость выходной координаты объекта $\dot{x}_2(h)$. В этом случае нет необходимости дополнительно формировать управляющее воздействие μ_1 , так как $\mu_1 = m_1 = -V m_0$, а управляющие воздействия, соответствующие реальному параметру $\hat{K}_0 = \hat{\alpha}/b$, на основании формулы (2.23) можно определить в виде

$$\hat{m}_0 = \hat{K}_0 \Theta_n = \frac{m_0}{hx_2(h)} \Theta_n; \quad \hat{m}_1 = -V \hat{m}_0.$$

Схема системы с регулятором, реализующим эти зависимости, показана на рис. 2.9, а, а временные диаграммы, поясняющие

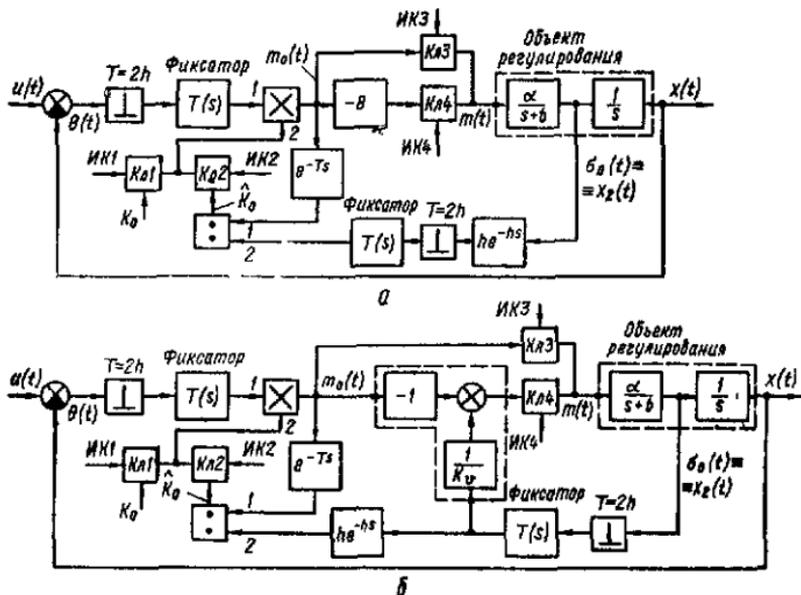


Рис. 2.9

работу этой системы, — на рис. 2.10. Следует иметь в виду, что регулятор должен обязательно содержать генератор тактовых импульсов, устройство синхронизации (для формирования импульса синхронизации или импульса запуска) и формирователь импульсов коммутации. Эти устройства (на схеме не показаны) подробно описаны в гл. 3.

Регулятор включает в себя следующие элементы: два мгновенных ключа с шагом квантования $T = 2h$, два фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией $T(s) = (1 - e^{-Ts})/s$, элементы задержки с передаточными функциями he^{-hs} и e^{-Ts} , перемножитель, делитель, масштабирующий усилитель с коэффициентом передачи $-V$ и четыре ключа $K_{\lambda 1} - K_{\lambda 4}$, которые отрываются при наличии положительных импульсов коммутации $ИК1 - ИК4$ на их управляющих входах.

При поступлении скачка входного сигнала $u(t)$ импульс синхронизации запускает схему регулятора, и в интервале $0 \leq t < T$ на перемножитель поступают сигнал ошибки Θ_0 и сигнал, равный расчетному коэффициенту K_0 . На входе объекта

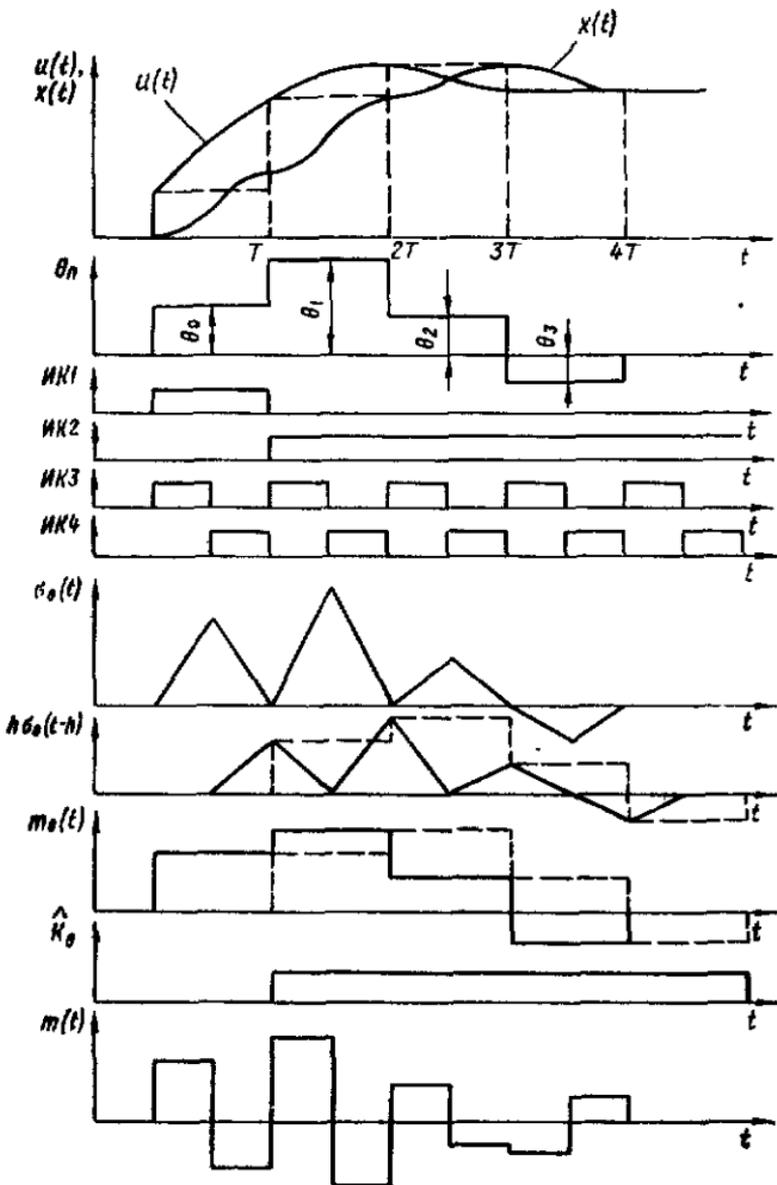


Рис. 2.10

формируются расчетные сигналы $m_0 = K_0 \theta_0$ и $m_1 = -B m_0$. В момент $t = T$ на входах 1 и 2 делителя формируются сигналы m_0 и $h x_2(h)$, которые сохраняются в интервале $T \leq t < 2T$. Таким образом, на выходе делителя в интервале $T \leq t < 2T$ идентифицируется параметр

$$\hat{K}_0 = \frac{m_0}{h x_2(h)}$$

и на входе объекта формируются сигналы $\hat{m}_0 = K_0 \theta_1$ и $\hat{m}_1 = -B \hat{m}_0$. В следующих интервалах регулирования $nT \leq t < (n+1)T$

$< (n + 1)T$, $n = 2, 3, \dots$, параметр \hat{K}_0 идентифицируется таким же образом и сохраняется на выходе делителя. Если входной сигнал не изменяется, в системе устанавливается ошибка, равная нулю.

Если изменяющимся или неточно рассчитанным параметром в объекте регулирования является постоянная времени $\hat{T}_0 = = \hat{b}^{-1}$ и есть возможность измерения скорости выходной координаты объекта, то управляющие воздействия, соответствующие реальному параметру $T_0 = b^{-1}$, можно определить по формулам (2.49) и (2.50).

При построении систем с настраивающимися регуляторами (рис. 2.9) необходимо учитывать следующее. Параметры \hat{b} , \hat{K}_v , а значит, и параметры \hat{B} , \hat{K}_0 и \hat{K}'_0 идентифицируются на каждом интервале регулирования длительностью $T = 2h$ по измеренным на этом же интервале координатам объекта и воздействиям на объект. Управляющее воздействие μ_1 (для первого интервала) или \hat{m}_1 (для следующих интервалов) формируется по идентифицированным параметрам и измеренным на этом же интервале координатам объекта и воздействию m_0 или \hat{m}_0 . Воздействие \hat{m}_0 формируется по координатам объекта и воздействию на объект, измеренным на предыдущем интервале, и при формировании воздействия \hat{m}_0 используются параметры, идентифицированные на предыдущем интервале. С учетом этих замечаний на основании формул (2.49), (2.50) можно записать

$$1 - \hat{B} = \frac{\sigma_0(h)}{m_0 K_v} = \frac{\sigma_{01}(h)}{\hat{m}_{01} K_v} = \dots = \frac{\sigma_{0n}(h)}{\hat{m}_{0n} K_v};$$

$$m_{10} = \mu_1 = \frac{\sigma_0(h)}{K_v} - m_0, \quad \hat{m}_{11} = \frac{\sigma_{01}(h)}{K_v} - \hat{m}_{01}, \dots, \quad \hat{m}_{1n} = \frac{\sigma_{0n}(h)}{K_v} - \hat{m}_{0n};$$

$$\hat{m}_{01} = \frac{m_0 \Theta_1}{h \sigma_0(h)}; \quad \hat{m}_{02} = \frac{\hat{m}_{01} \Theta_2}{h \sigma_{01}(h)}; \dots; \quad \hat{m}_{0n} = \frac{\hat{m}_{0n-1} \Theta_n}{h \sigma_{0n-1}(h)},$$

где n — номер интервала регулирования ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Система с регулятором, реализующим эти зависимости, изображена на рис. 2.9, б, а входы, поясняющие работу этой системы — на рис. 2.11. Регулятор состоит в основном из тех же элементов, что и регулятор в системе на рис. 2.9, а, но масштабирующий усилитель с коэффициентом передачи B заменен блоком (на рис. 2.9, б обведен штриховой линией), состоящим из инвертора, сумматора и пропорционального звена с коэффициентом передачи $1/K_v$. Кроме того, моменты замыкания мгновенного ключа в цепи обратной связи смещены на время h относительно моментов замыкания мгновенного ключа в прямой цепи (ступенчатая функция $\sigma_{0n}(h)$ смещена на время h относительно ступенчатой функции Θ_n на рис. 2.11). Импульсы коммутации ИК1—ИК4 такие же, как и в схеме на рис. 2.9, а.

Блок на входе ключа КМ формирует управляющие воздействия в соответствии с формулой $m_{1n} = \sigma_{0n}(h)/K_v - m_{0n}$ в интервалах $(n+h)T \leq t < (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Настройку регулятора выполняют следующим образом (рис. 2.11). При поступлении скачка входного сигнала $u(t)$ импульс синхронизации запускает схему регулятора и в интервале

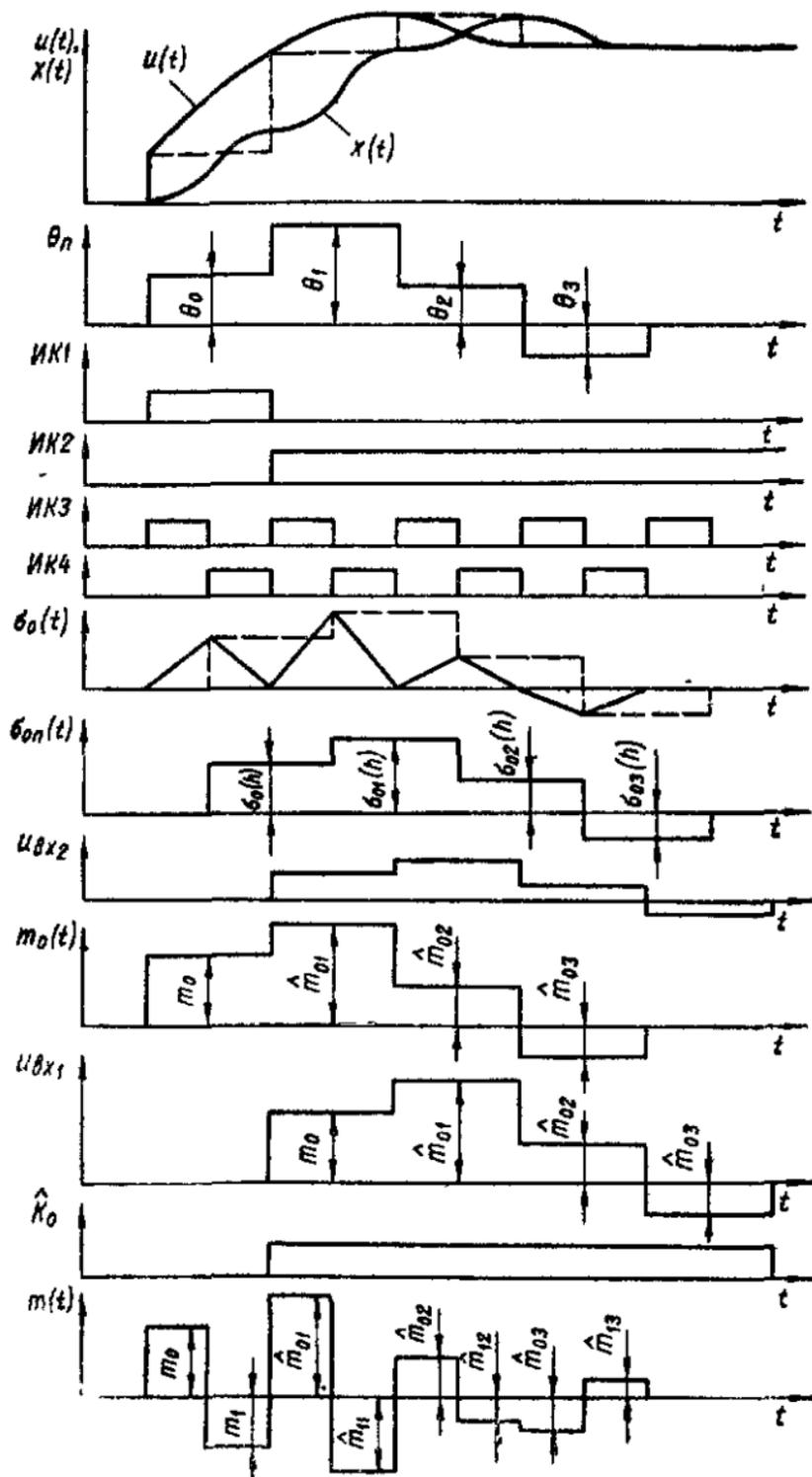


Рис. 2.11

$0 \leq t < T$ на умножитель поступают сигнал ошибки Θ_0 и сигнал, равный расчетному коэффициенту K_0 . На выходе умножителя формируется расчетный сигнал $m_0 = K_0 \Theta_0$, который в промежутке $0 \leq t < h$ поступает на вход объекта через ключ $K_{Л3}$. В промежутке $h \leq t < T$ блок на входе ключа $K_{Л4}$ формирует сигнал $m_{10} = \sigma_0(h)/K_0 - m_0$, который поступает на вход объекта через ключ $K_{Л4}$. В момент $t = T$ на входах 1 и 2 делителя формируются сигналы m_0 и $h\sigma_0(h)$ (эти сигналы обозначены на рис. 2.11 соответственно $u_{вх1}$ и $u_{вх2}$), которые сохраняются в интервале $T \leq t < 2T$, и на выходе делителя идентифицируется параметр $\hat{K}_0 = \frac{m_0}{h\sigma_0(h)}$, а на выходе умножителя

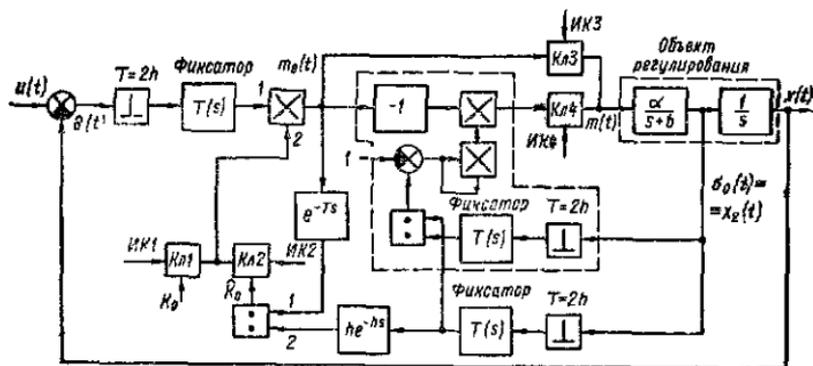


Рис. 2.12

формируется сигнал $\hat{m}_{01} = \hat{K} \Theta_1 = \frac{m_0 \Theta_1}{h\sigma_0(h)}$. Этот сигнал поступает на вход объекта через ключ $K_{Л3}$ в промежутке $T \leq t < T+h$, а в промежутке $T+h \leq t < 2T$ блок на входе ключа $K_{Л4}$ формирует сигнал $\hat{m}_{11} = \sigma_{01}(h)/K_0 - \hat{m}_{01}$, который поступает на вход объекта через ключ $K_{Л4}$ и т. д.

Нетрудно заметить, что передаточная функция блока, включенного перед ключом $K_{Л4}$, равна идентифицированному параметру $-\hat{V}$. Действительно, $\hat{m}_{11} = -\hat{V}m_{01} = \frac{\sigma_{01}(h)}{K_0} - \hat{m}_{01}$. Параметры \hat{K}_0 и \hat{V} идентифицируются на каждом интервале. Если входной сигнал не изменяется и параметры объекта регулирования постоянны, ошибка в системе равна нулю.

Если изменяющимися или неточно рассчитанными параметрами в объекте являются постоянная времени $\hat{T}_0 = \hat{b}^{-1}$ и коэффициент усиления \hat{K}_0 и есть возможность измерения скорости выходной координаты объекта, то управляющие воздействия на объект регулирования, соответствующие реальным параметрам объекта, определяются по формулам (2.56) и (2.57). С учетом этих замечаний на основании этих формул можно записать

$$\hat{m}_{1n} = -\hat{m}_{0n} \left[\frac{\sigma_{0n}(h)}{\sigma_{0n}(h/2)} - 1 \right]^2; \quad \hat{m}_{0n} = \frac{\hat{m}_{0n-1} \Theta_n}{h\sigma_{0n-1}(h)},$$

где n — номер интервала регулирования ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Система с регулятором, реализующим эти зависимости, показана на рис. 2.12. Регулятор отличается от регуляторов в системах на рис. 2.9 блоком (на рис. 2.12 обведен штриховой линией), который в соответствии с первой зависимостью формирует управляющие воздействия $\tilde{m}_{1л}$ в интервалах $(n+h)T \leq t < (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Этот блок состоит из двух умножителей, делителя, инвертора, вычитающего устройства, мгновенного ключа, моменты замыкания в котором смещены на время $h/2$ относительно моментов замыкания мгновенного ключа в прямой цепи, и фиксатора. Нетрудно заметить, что передаточная функция блока равна идентифицированному параметру — \hat{B} .

Таким образом, системы на рис. 2.9, б и 2.12 отличаются только блоками идентификации параметра \hat{B} и работа этих систем иллюстрируется одними и теми же эпюрами (см. рис. 2.11).

2.3. УЧЕТ НАСЫЩЕНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Нелинейность типа «насыщение» существенно влияет на переходные процессы в системах управления, значительно увеличивая время регулирования. Структурная схема системы с нелинейным элементом (НЭ) показана на рис. 2.13, а, характеристика нелинейного элемента с уровнем ограничения $U_{огр}$ —

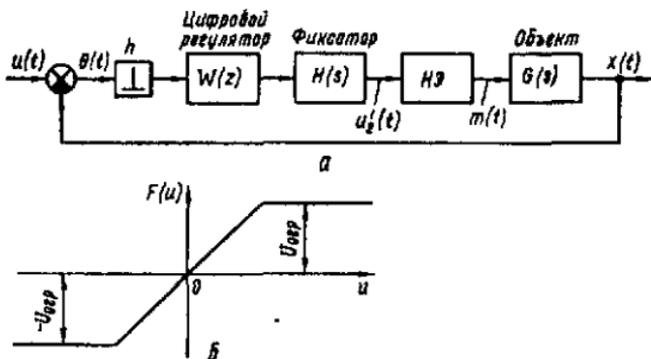


Рис. 2.13

на рис. 2.13, б. При этом управляющее воздействие на входе объекта

$$m(t) = \begin{cases} u_2'(t) & \text{при } |u_2'(t)| \leq U_{огр}; \\ U_{огр} & \text{при } |u_2'(t)| > U_{огр}; \end{cases}$$

где $u_2'(t)$ — управляющее воздействие на выходе цифрового регулятора (с учетом фиксатора нулевого порядка).

Для любого линейного объекта регулирования при ступенчатом входном воздействии величиной U можно определить шаг квантования h , при котором система на рис. 2.13, а работает в линейном режиме, а регулятор обеспечивает оптимальные переходные процессы.

Пусть объект регулирования в системе на рис. 2.13, а описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$. Тогда для

получении оптимального переходного процесса при ступенчатом входном воздействии и нулевых начальных условиях цифровой регулятор должен иметь передаточную функцию (см. табл. 1.1, п. 2) с коэффициентом передачи $K_0 = b[\alpha h(1 - e^{-bh})]^{-1}$. При условии, что $U_{\text{огр}}/K_0 \geq U$, система работает в линейном режиме и переходные процессы закончатся за время

$$T_1 = Nh = 2h. \quad (2.60)$$

Очевидно, минимальный шаг квантования h можно определить из трансцендентного уравнения

$$K_0 \alpha = \frac{b}{h(1 - e^{-bh})} = \frac{\alpha U_{\text{огр}}}{U}. \quad (2.61)$$

Зависимости $K_0 \alpha = b[h(1 - e^{-bh})]^{-1}$ при различных величинах b показаны на рис. 2.14. Определяя K_0 из условия $K_0 = U_{\text{огр}}/U$, по произведению $K_0 \alpha$ находим величину h . При определенных отношениях $U_{\text{огр}}/U$ полученный таким

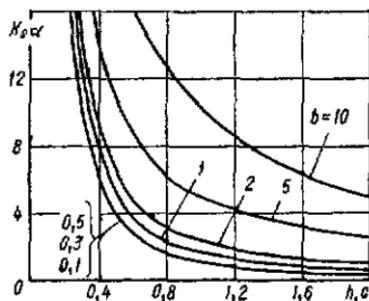


Рис. 2.14

путем минимальный шаг квантования h может не удовлетворять условиям (2.1) или (2.2). В таких случаях следует использовать цифровые регуляторы с неравномерным шагом квантования.

Если в рассмотренной системе цифровой регулятор с равномерным шагом квантования формирует управляющие воздействия $m_0 = K_0 U$ в первом интервале длительностью h и $m_1 = -e^{-bh} K_0 U$

во втором интервале длительностью h , то регулятор с неравномерным шагом квантования может формировать управляющие воздействия $m = KU$ в первом интервале длительностью h_0 и $m = -KU$ во втором интервале длительностью h_1 . При этом переходные процессы заканчиваются за время

$$T_2 = h_0 + h_1. \quad (2.62)$$

Шаги квантования h_0 и h_1 связаны соотношением (1.148), а коэффициент передачи регулятора

$$K = \frac{b}{\alpha} \frac{1}{\Delta h}. \quad (2.63)$$

где

$$\Delta h = h_0 - h_1; \quad h_1 = \frac{1}{b} \ln(2 - e^{-bh_0}). \quad (2.64)$$

Рассмотрим получаемое из формулы (2.64) выражение

$$b\Delta h = bh_0 - \ln(2 - e^{-bh_0}).$$

Представим это выражение в виде

$$\ln e^{b\Delta h} = \ln e^{bh_0} - \ln(2 - e^{-bh_0}). \quad (2.65)$$

Обозначая $e^{b h_0} = x$ и потенцируя левую и правую части уравнения (2.65), находим

$$e^{b \Delta h} = \frac{x}{2 - x^{-1}} = \frac{x}{2x - 1}$$

или

$$x^2 - 2e^{b \Delta h} x + e^{b \Delta h} = 0.$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение относительно неизвестной величины $x = e^{b h_0}$. Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = e^{b \Delta h} \pm \sqrt{e^{b \Delta h} (e^{b \Delta h} - 1)}.$$

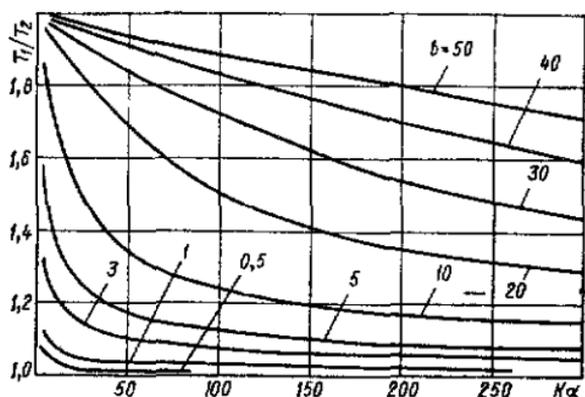


Рис. 2.15

Единственное решение, соответствующее физической трактовке интервала h_0 ,

$$x = e^{b h_0} = e^{b \Delta h} + \sqrt{e^{b \Delta h} (e^{b \Delta h} - 1)}. \quad (2.66)$$

Логарифмируя выражение (2.66), получаем

$$h_0 = \frac{1}{b} \ln [e^{b \Delta h} + \sqrt{e^{b \Delta h} (e^{b \Delta h} - 1)}]. \quad (2.67)$$

Определяя K из условия $K = U_{\text{орп}}/U$ по значению произведения $K\alpha$ из формулы (2.63), находим

$$\Delta h = b/K\alpha. \quad (2.68)$$

Далее по формулам (2.67), (2.64) и (2.62) последовательно определяем величины h_0 , h_1 и время регулирования T_2 . Выигрыш в быстродействии, который обеспечивает регулятор с неравномерным шагом квантования по сравнению с регулятором, имеющим равномерный шаг h , при работе системы на рис. 2.13, а в линейном режиме при условии $K_0 = K = U_{\text{орп}}/U$ можно оценить отношением T_1/T_2 . На рис. 2.15 построены рассчитанные на ЭВМ по формулам (2.60)–(2.64), (2.67) и (2.68) графики зависимостей $T_1/T_2 = f(K\alpha)$ при различных значениях частоты сопряжения b для системы рис. 2.13, а с объектом регулирования, имеющим передаточную функцию $G(s) = \alpha[s(s+b)]^{-1}$.

Еще больший выигрыш в быстродействии можно получить для систем управления с объектами регулирования более высо-

кого порядка. Для регуляторов с неравномерным шагом целесообразно определять шаги квантования при одинаковой для каждого шага величине (амплитуде) управляющих воздействий на объект регулирования.

При поступлении единичного ступенчатого воздействия на вход системы на рис. 1.1, а, имеющей цифровой регулятор с неравномерным шагом и объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^3$, по изложенной методике можно получить следующую систему уравнений для определения шагов квантования (при нулевых начальных условиях и условии $|m_0| = |m_1| = \dots = |m_2| = m$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} (h_0^3 - h_1^3 + h_2^3) + \frac{1}{2} (h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2 + h_0^2 h_2 - h_1^2 h_2 + h_2^2 h_2 - \\ - h_2^2 h_1) + h_0 h_1 h_2 = \frac{1}{\alpha m}; \\ \frac{1}{2} (h_0^2 - h_1^2 + h_2^2) + h_0 h_1 + h_0 h_2 - h_1 h_2 = 0; \\ h_0 - h_1 + h_2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$h_0 = h_1/2 = h_2 = \sqrt[3]{1/(4\alpha m)}.$$

Переходные процессы заканчиваются за время

$$T_2 = h_0 + h_1 + h_2 = 4h_0 = 2\sqrt[3]{2/(\alpha m)}.$$

Для данной системы с равномерным шагом квантования переходные процессы заканчиваются за время $T_1 = 3h$ и максимальное управляющее воздействие $|m_{\max}| = |m_1| = |b_1 K_0| = 2/(\alpha h^3)$.

Таким образом, $T_1 = 3h = 3\sqrt[3]{2/(\alpha |m_1|)}$.

Определяя m и m_1 из условия $|m| = |m_1| = U_{\text{огр}}/U$, находим выигрыш в быстродействии, который обеспечивает регулятор с неравномерным шагом квантования по сравнению с регулятором, имеющим равномерный шаг, при работе системы на рис. 2.13, а в линейном режиме (когда объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^3$) $T_1/T_2 = 1,5$.

В общем виде задачу синтеза оптимальных цифровых регуляторов в системе на рис. 2.13, а при наличии ограничения тига «насыщение» можно сформулировать следующим образом [28]. Для заданного входного воздействия типа $u(t) = U$ или $u(t) = U + \sigma t$, заданной передаточной функции объекта регулирования $G(s)$ и заданного вектора начальных условий $x(0)$ необходимо определить параметры регулятора, при которых система управления вырабатывает заданное входное воздействие за минимальное число шагов квантования k и при этом амплитуды управляющих воздействий на входе объекта по абсолютной величине не превышают заданного уровня ограничения $U_{\text{огр}}$ (рис. 2.13, б).

Для регулятора с неравномерным шагом квантования можно определить амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта регулирования при указанных входных воздействиях на входе системы управления. Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия для статических объектов регулирования в системах, имеющих регулятор

2.1. Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе статических объектов регулирования в системах, имеющих регулятор с неравномерным шагом, при единичном ступенчатом воздействии на входе систем в нулевых начальных условиях

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования	Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта
1	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$m_0 = \frac{ab}{\alpha} \frac{B_1 - A_1}{B_1 - A_1 - B_0 B_1 (1 - A_1) + A_0 A_1 (1 - B_1)};$ $m_1 = \frac{ab}{\alpha} \frac{B_1 (1 - B_0) - A_1 (1 - A_0)}{B_1 - A_1 - B_0 B_1 (1 - A_1) + A_0 A_1 (1 - B_1)};$ $m_N = \frac{ab}{\alpha}; \quad A_0 = e^{-ah_0}; \quad A_1 = e^{-ah_1};$ $B_0 = e^{-bh_0}; \quad B_1 = e^{-bh_1};$
2	$\frac{\alpha}{s^2 + bs + a}$	$m_0 = \frac{a \sin \lambda h_1}{\alpha \{ \sqrt{B_0 B_1} \sin \lambda h_0 + \sin \lambda h_1 - \sqrt{B_0} \sin \lambda (h_0 + h_1) \}};$ $m_1 = - \frac{a \{ \sqrt{B_0} \sin \lambda (h_0 + h_1) - \sin \lambda h_1 \}}{\alpha \{ \sqrt{B_0 B_1} \sin \lambda h_0 + \sin \lambda h_1 - \sqrt{B_0} \sin \lambda (h_0 + h_1) \}};$ $m_N = \frac{a}{\alpha}; \quad B_0 = e^{-bh_0}; \quad B_1 = e^{-bh_1};$ $\lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}$
3	$\frac{\alpha}{s^2 + a^2}$	$m_0 = \frac{a^2 \sin ah_1}{\alpha \{ \sin ah_0 + \sin ah_1 - \sin a (h_0 - h_1) \}};$ $m_1 = \frac{a^2 \{ \sin ah_1 - \sin a (h_0 + h_1) \}}{\alpha \{ \sin ah_0 + \sin ah_1 - \sin a (h_0 + h_1) \}};$ $m_N = \frac{a^2}{\alpha}$
4	$\frac{\alpha}{(s+a)^2}$	$m_0 = \frac{a^2 h_1}{\alpha \{ h_1 (1 - A_0) - h_0 A_0 (1 - A_1) \}};$ $m_1 = \frac{a^2 \{ h_1 (1 - A_0) - h_0 A_0 \}}{\alpha \{ h_1 (1 - A_0) - h_0 A_0 (1 - A_1) \}};$ $m_N = \frac{a^2}{\alpha}; \quad A_0 = e^{-ah_0}; \quad A_1 = e^{-ah_1}$

2.2. Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе астатических объектов регулирования в системах, имеющих регулятор с неравномерным шагом, при воздействии вида $u(t) = U + \sigma_1 t$ и ненулевых начальных условиях по скорости

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования	Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта
1	$\frac{\alpha}{s^2}$	$m_0 = \frac{2}{\alpha h_0 (h_0 + h_1)} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{2h_0 + h_1}{2} \right];$ $m_1 = - \frac{2}{\alpha h_1 (h_0 + h_1)} \left[U + (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{h_0}{2} \right]$
2	$\frac{\alpha}{s(s+b)}$	$m_0 = \alpha \frac{b(1-B_1)}{[h_0(1-B_1) - h_1 B_1(1-B_0)]} \left[U + \sigma_1 \times \right.$ $\times \left(h_0 + \frac{1}{b} - \frac{h_1 B_1}{1-B_1} \right) - \sigma_0 \left(\frac{1}{b} - \frac{h_0 B_0 B_1}{1-B_1} \right) \left. \right];$ $m_1 = - \frac{b B_1 (1-B_0)}{\alpha [h_0(1-B_1) - h_1 B_1(1-B_0)]} \times$ $\times \left\{ U + \sigma_1 \left[h_0 + h_1 + \frac{1}{b} - \frac{h_0}{B_1(1-B_0)} \right] - \right.$ $\left. - \sigma_0 \left[\frac{1}{b} - \frac{B_0 B_1 (h_0 - h_1)}{1-B_1} - \frac{h_0 B_0}{1-B_0} \right] \right\};$ $m_v = \sigma_1 \frac{b}{\alpha}; \quad B_0 = e^{-bh_0}; \quad B_1 = e^{-bh_1}$
3	$\frac{\alpha}{s^3}$	$m_0 = \frac{6(h_1 + h_2)}{\alpha h_0 C} \left\{ U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left[h_0 + h_1 + \right. \right.$ $\left. \left. + h_2 - \frac{h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2}{3(h_1 + h_2)} \right] \right\};$ $m_1 = - \frac{6(h_0 + 2h_1 + h_2)}{\alpha h_1 C} \left\{ U + (\sigma_1 - \sigma_0) \times \right.$ $\times \left[h_0 + h_1 + h_2 - \frac{h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2}{3(h_1 + h_2)} - \right.$ $\left. \left. - \frac{C}{3(h_1 + h_2)(h_0 + 2h_1 + h_2)} \right] \right\};$ $m_2 = \frac{6(h_0 + h_1)}{\alpha h_2 C} \left\{ U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left[h_0 + h_1 + \right. \right.$ $\left. \left. + h_2 - \frac{h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2}{3(h_1 + h_2)} - \right. \right.$ $\left. \left. - \frac{C}{3(h_1 + h_2)(h_0 + h_1)} \right] \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования	Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта
		$C = (h_0 + h_1 + h_2) (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2) + 3h_0h_1h_2 + h_0(h_1^2 - h_0^2) + h_2(h_1^2 - h_2^2)$
4	$\frac{\alpha}{s^2(s+b)}$	$m_0 = \frac{2bE}{\alpha C} [U + (\sigma_1 - \sigma_0) (h_0 + h_1 + h_2 - D)];$ $m_1 = -\frac{2bG}{\alpha C} \left\{ U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left[h_0 + h_1 + h_2 - D - \frac{(1 - B_2) C}{2EG} \right] \right\};$ $m_2 = \frac{2bH}{\alpha C} \left\{ U + (\sigma_1 - \sigma_0) \left[h_0 + h_1 + h_2 - D - \frac{B_2(1 - B_1) C}{2EH} \right] \right\};$ $C = h_0h_1(h_0 + h_1)(1 - B_2) - h_0h_2B_2(h_0 + h_2)(1 - B_1) + h_1h_2B_1B_2(h_1 + h_2)(1 - B_0) - 2h_0h_1h_2B_2(1 - B_1);$ $D = \frac{h_1(1 - B_2)(bh_1 - 2 + 2bh_2) + h_2B_2(1 - B_1)(2 - bh_2)}{2bE};$ $B_0 = e^{-bh_0}; \quad B_1 = e^{-bh_1}; \quad B_2 = e^{-bh_2}$ $E = h_1(1 - B_2) - h_2B_2(1 - B_1);$ $G = h_0(1 - B_2) - h_2B_1B_2(1 - B_0);$ $H = h_0B_2(1 - B_1) - h_1B_1B_2(1 - B_0)$
5	$\frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$m_0 = \frac{abE}{\alpha C} \left[U + \sigma_1 \left(h_0 + h_1 + h_2 + \frac{a+b}{ab} - \frac{h_2}{1 - B_2} + D \right) - \sigma_0 M \right];$ $m_1 = -\frac{abG}{\alpha C} \left\{ U + \sigma_1 \left[h_0 + h_1 + h_2 + \frac{a+b}{ab} - \frac{h_2}{1 - B_2} + D + \frac{C(A_2 - B_2)}{EG} \right] - \sigma_0 \left(M - \frac{CH}{EG} \right) \right\};$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования	Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта
		$m_N = \frac{abA_2B_2F}{\alpha C} \left\{ U + \sigma_1 \left[h_0 + h_1 + h_2 + \right. \right.$ $+ \frac{a+b}{ab} - \frac{h_2}{1-B_2} + D +$ $+ \frac{E - B_2(1-B_1)(B_2-A_2)}{E} \times$ $\times \frac{C}{(1-B_2)A_2B_2F} \left. \right] - \sigma_0 \left[M + \right.$ $+ \frac{CB_0B_1}{A_2(1-B_2)F} - \frac{C(1-B_1)H}{A_2(1-B_2)FE} \left. \right] \};$ $C = h_0E - h_1G + h_2FA_2B_2; \quad M = \frac{a+b}{ab} +$ $+ \frac{h_2L - h_1H}{E};$ $D = \frac{(A_2 - B_2) [h_1(1 - B_2) - h_2B_2(1 - B_1)]}{(1 - B_2)E};$ $m_N = \sigma_1 \frac{ab}{\alpha};$ $E = A_2B_2(B_1 - A_1) + B_2(1 - B_1) - A_2(1 - A_1);$ $F = A_1B_1(B_0 - A_0) + B_1(1 - B_0) - A_1(1 - A_0);$ $G = B_1B_2(1 - A_2)(1 - B_0) - A_1A_2(1 - B_2)(1 - A_0);$ $H = B_0B_1B_2(1 - A_2) - A_0A_1A_2(1 - B_2);$ $L = A_2B_2[B_0B_1(1 - A_1) - A_0A_1(1 - B_1)];$ $A_0 = e^{-ah_0}; \quad A_1 = e^{-ah_1}; \quad A_2 = e^{-ah_2};$ $B_0 = e^{-bh_0}; \quad B_1 = e^{-bh_1}; \quad B_2 = e^{-bh_2}$

с неравномерным шагом, при единичном ступенчатом воздействии на входе систем приведены в табл. 2.1, а для астатических объектов регулирования при линейно изменяющемся воздействии на входе систем — в табл. 2.2.

Как видно из таблиц, амплитуды управляющих импульсов m_v являются функциями параметров передаточной функции объекта и длительности шага регулирования h_0, h_1, \dots, h_{N-1} , где N — порядок передаточной функции объекта регулирования, параметров входного воздействия и вектора $x(0)$.

Пусть в цифровом регуляторе шаг квантования равен h . Тогда каждый шаг регулирования можно выразить в виде $h'_v = k_v h$, где

k_v — целое число, т. е. $k'_0 = k_0 h$; $k'_1 = k_1 h$, ..., $k'_{N-1} = k_{N-1} h$.
 При этом $k'_v \geq h_v$.

Длительность переходного процесса на выходе системы

$$T = \sum_{v=0}^{N-1} h'_v = h \sum_{v=0}^{N-1} k_v,$$

где k_v — целые числа.

Теперь задачу синтеза цифрового регулятора можно сформулировать так: необходимо определить числа k_v , при которых $T = \min$ и $m_v \leq U_{огр}$ (m_v — амплитуда на v -м шаге регулирования длительностью $k_v h$), и амплитуды импульсов m_v управляющего воздействия на входе объекта регулирования при заданных передаточной функции объекта $G(s)$ и входном воздействии $u(t)$. Эта задача относится к задачам нелинейного целочисленного программирования с линейной целевой функцией и ограничениями в виде системы неравенств и не имеет универсального алгоритма решения. Рассмотрим алгоритм, основанный на методе Гаусса — Зайделя, с использованием направленного перебора [29]. Аргументы k_v функции $T(k_v)$, для которой необходимо найти минимум, ограничены снизу значениями $k_0 = 1$, $k_1 = 1$, ..., $k_{N-1} = 1$.

Схема алгоритма поиска оптимальных значений k_v , при которых $T = \min$ и $m_v \leq U_{огр}$, и расчета при определяемых шагах регулирования $k_v h = h'_v$ амплитуд m_v показана на рис. 2.16. Входными параметрами алгоритма (блок 1) являются: шаг квантования h ; число шагов квантования k^* , которые укладываются в шаг регулирования при заданном уровне ограничения и при равномерных шагах регулирования; заданный уровень ограничения $U_{огр}$; параметры входного воздействия U и σ ; количество шагов регулирования N , равное порядку передаточной функции объекта регулирования. В блоке 2 формируется массив $k_v = k^*$, где $v=0, 1, \dots, N-1$, т. е. начальное количество шагов квантования длительностью h в v -м шаге регулирования, а также рассчитывается начальное суммарное количество шагов квантования h по формуле $k_\Sigma = Nk^*$.

Далее последовательно длительность каждого шага регулирования, начиная с $N-1$ -го, уменьшается на шаг квантования h (блоки 3 и 4). При этом каждый раз выполняется расчет амплитуд m_l ($l=0, 1, \dots, N-1$) на всех шагах регулирования $h_l = k_l h$ (блок 6) и сравнение полученных величин m_l с величиной $U_{огр}$ (блоки 7—10). Если все значения $m_l < U_{огр}$, производится возврат к блоку 4. Если хотя бы одна величина m_l превышает уровень ограничения $U_{огр}$, управление передается блоку 12, где производится восстановление прежней величины k_v (прибавление единицы к количеству шагов квантования на v -м шаге регулирования), и переход к $(v-1)$ -му шагу регулирования. В блоке 13 проверяется окончание цикла по количеству шагов регулирования. По окончании цикла оптимизации рассчитывается суммарное количество шагов квантования h по формуле $k_\Sigma^* = \sum_{v=0}^{N-1} k_v$ и срав-

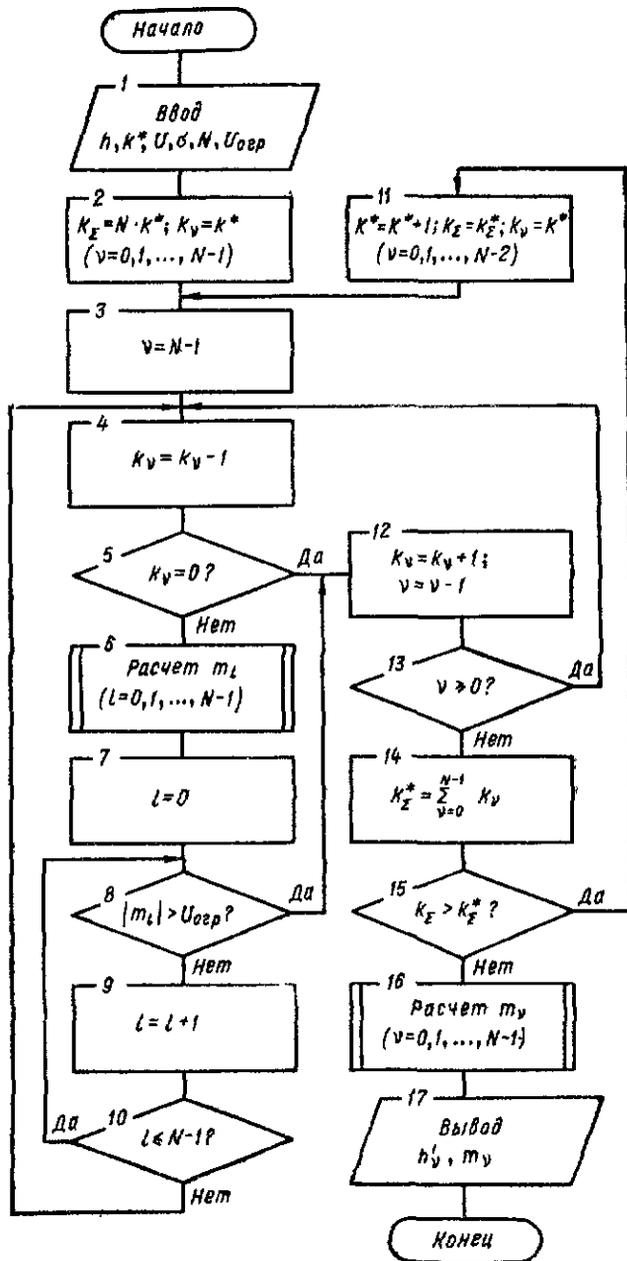


Рис. 2.16

ивается k_{Σ}^* с k_{Σ} (блоки 14 и 15). Если $k_{\Sigma}^* < k_{\Sigma}$, то переходят к блоку 11 для организации повторного цикла оптимизации. В качестве нового значения k_{Σ} принимается значение k_{Σ}^* , а k^* увеличивается на единицу и формируется массив k_v . Управление передается блоку 3. Эта процедура вызвана тем, что оптимальное значение k_v может быть больше первоначального значения k^* , а алгоритм производит только уменьшение k_v , начиная с $k_v = k^*$. В случае равенства k_{Σ}^* и k_{Σ} процесс оптимизации заканчивается, выполняется расчет амплитуд m_v на полученных шагах

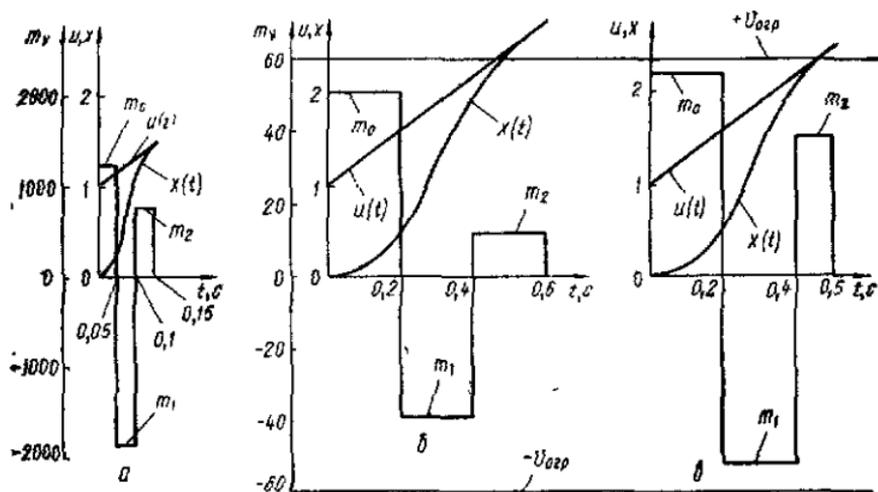


Рис. 2.17

регулирования $h'_v = k_v h$ ($v = 0, 1, \dots, N - 1$) и вывод полученных результатов (блоки 16, 17). Блок б введен для устранения попытки уменьшения шага регулирования длительностью h ($k_v = 1$). Величину m_v рассчитывают по формулам или численными методами, и в схеме алгоритма этот блок выделен в виде подпрограммы.

Рассмотрим следующую задачу. Система управления (рис. 2.13, а) имеет объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+a)(s+b)]^{-1}$, параметры которой равны $\alpha = 10 \text{ с}^{-3}$, $a = 5 \text{ с}^{-1}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Шаг квантования h равен $0,05 \text{ с}$. Нелинейная характеристика (рис. 2.13, б) имеет уровень ограничения $U_{огр}$, равный 60. На вход системы поступает линейно-изменяющееся воздействие $u(t) = U + \sigma t$, где $U = 1$; $\sigma = 3 \text{ с}^{-1}$, при нулевых начальных условиях. Передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора с равномерным шагом регулирования определяем по табл. 1.4, п. 5. Если шаг регулирования принять равным шагу квантования h , то получим следующие значения амплитуд управляющего воздействия на входе объекта (рис. 2.17, а): $m_0 = 1231,01$; $m_1 = -1930,05$; $m_2 = 770,05$. Эти значения намного превышают уровень ограничения $U_{огр}$. Если шаг регулирования увеличить до $h' = k^* h = 4 \cdot 0,05 = 0,2 \text{ с}$, то при расчете по тем же формулам получим

следующие значения амплитуд управляющего воздействия на входе объекта (рис. 2.17, б): $m_0 = 51,13$; $m_1 = -38,68$; $m_2 = 12,06$, где k^* — минимальное число шагов квантования (в каждом шаге регулирования h'), при котором амплитуды m_ν ($\nu = 0, 1, 2$) еще не выходят за уровень ограничения. Таким образом, используя цифровой регулятор с равномерным шагом

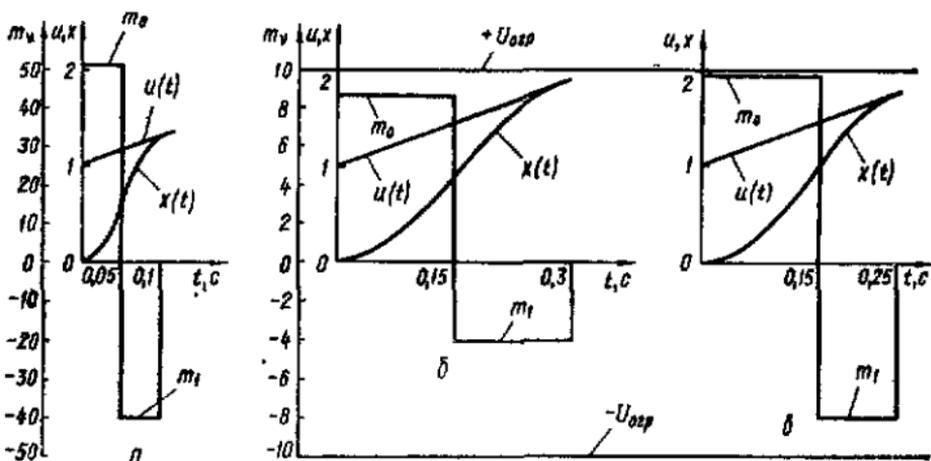


Рис. 2.18

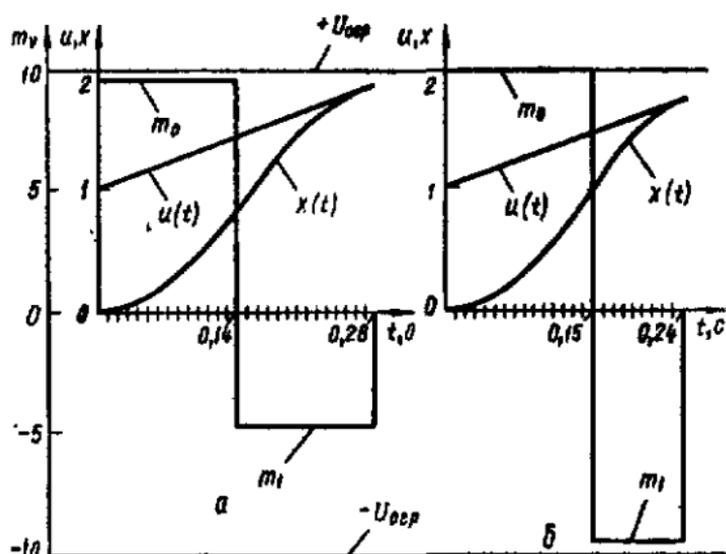


Рис. 2.19

регулирования $h' = k^*h = 0,2$ с, можно получить оптимальный переходный процесс в системе за время регулирования $T = Nh' = 0,6$ с.

Рассмотрим регулятор с неравномерным шагом регулирования $h'_\nu = k'_\nu h$. Амплитуды импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта определим по табл. 2.2, п. 5. Рассчитав по алгоритму (рис. 2.16), получим следующие значения (рис. 2.17, в): $k_0 = 4$; $k_1 = 4$; $k_2 = 2$; $m_0 = 56,13$; $m_1 = -52,43$; $m_2 = 38,59$. Таким образом, используя цифровой ре-

гулятор с неравномерным шагом регулирования, можно организовать оптимальный переходный процесс в системе за время регулирования $T = h'_0 + h'_1 + h'_2 = (k_0 + k_1 + k_2)h = 0,5$ с.

Пусть система управления (см. рис. 2.13, а) имеет объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha [v(s+b)]^{-1}$, параметры которой равны $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Шаг квантования h равен 0,05 с. Нелинейная характеристика (рис. 2.13, б) имеет уровень ограничения $U_{\text{огр}} = 10$. На вход системы поступает воздействие $u(t) = 1 + 3\sigma$ при нулевых начальных условиях. Передаточную функцию $W(z)$ цифрового регулятора с равномерным шагом определяем по табл. 1.4, п. 2. Если шаг регулирования равен шагу квантования h , то амплитуды управляющего воздействия на входе объекта (рис. 2.18, а) равны: $m_0 = 51,44$; $m_1 = -40,24$, т. е. превышают уровень ограничения. Если шаг регулирования увеличить до $h' = k^*h = 3 \cdot 0,05 = 0,15$ с, то получим следующие значения амплитуд управляющего воздействия (рис. 2.18, б): $m_0 = 8,56$; $m_1 = -4,03$. Оптимальный переходной процесс заканчивается за время $T = Nh' = 2 \cdot 0,15 = 0,3$ с.

Используем регулятор с неравномерным шагом регулирования $h'_v = k_v h$. Выражения для амплитуд импульсов оптимального управляющего воздействия на входе объекта определяем по табл. 2.2, п. 2. Рассчитав по алгоритму (рис. 2.16), получим следующие значения (рис. 2.18, в): $k_0 = 3$; $k_1 = 2$; $m_0 = 9,69$; $m_1 = -8,03$. Таким образом, оптимальный переходный процесс при наличии регулятора с неравномерным шагом заканчивается за время регулирования $T = h'_0 + h'_1 = (k_0 + k_1)h = 0,25$ с.

Если в системе управления используется меньший шаг квантования h , то можно получить уменьшение времени переходного процесса не только в линейной системе управления без насыщения, но и в системе управления, имеющей нелинейность типа «насыщение». Пусть в рассматриваемой системе с объектом регулирования второго порядка шаг квантования $h = 0,01$ с, а остальные параметры прежние. Тогда при шаге регулирования, равном шагу квантования h , амплитуды управляющего воздействия на входе объекта равны: $m_0 = 1055,43$; $m_1 = -1004,23$, т. е. намного превышают уровень ограничения. Если шаг регулирования увеличить до $h' = k^*h = 14 \cdot 0,01 = 0,14$ с, то получим следующие амплитуды управляющего воздействия (рис. 2.19, а): $m_0 = 9,48$; $m_1 = -4,71$. Оптимальный переходный процесс заканчивается за время $T = N'_0 \cdot h' = 2 \cdot 0,14 = 0,28$ с.

Используем регулятор с неравномерным шагом регулирования $h'_v = k_v h$. Рассчитав по алгоритму (рис. 2.16), получим следующие значения (рис. 2.19, б): $k_0 = 15$; $k_1 = 9$; $m_0 = 9,97$; $m_1 = -9,46$. Оптимальный переходной процесс при наличии регулятора с неравномерным шагом заканчивается за время регулирования $T = h'_0 + h'_1 = (k_0 + k_1)h = 0,24$ с.

Схема алгоритма расчета числа шагов квантования k^* , которые укладываются в шаг регулирования $h' = k^*h$ при заданном уровне ограничения $U_{\text{огр}}$ величин амплитуд m_v управляющих воздействий, для регуляторов с равномерным шагом показана на рис. 2.20. Входными параметрами алгоритма (блок I) являются: N — число шагов регулирования, равное порядку передаточной функции объекта регулирования; h — шаг квантования; $U_{\text{огр}}$ — заданный уровень ограничения; параметры входного воздействия U и σ и $u(t) = U + \sigma t$. Расчет начинается при

$k = 1$ (блок 2). В блоке 3 рассчитывают амплитуды m_v ($v = 0, 1, \dots, N - 1$), например, по формулам табл. 1.4. В блоках 4—7 выполняется сравнение величин m_v с уровнем ограничения $U_{огр}$. Если хотя бы одна из величин m_v превышает $U_{огр}$, длительность шага регулирования увеличивается на шаг квантования h , т. е. k увеличивается на 1 (блок 9) и управление передается блоку 3. Если все $m_v \leq U_{огр}$, управление передается блоку 8 (вывод величин $h' = k \cdot h$ и m_v , где $v = 0, 1, \dots, N - 1$).

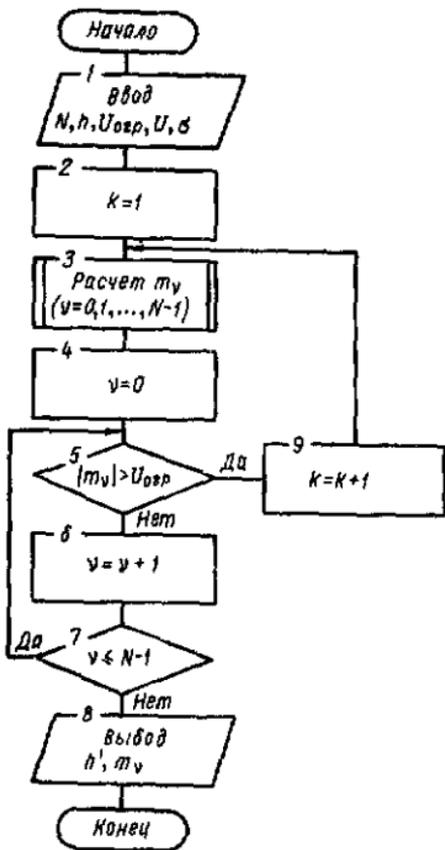


Рис. 2.20

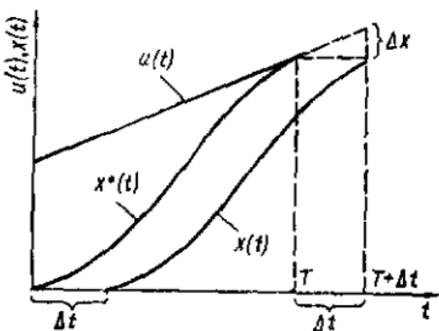


Рис. 2.21

вится отличным от оптимального (рис. 2.21).

Задержка выдачи управляющего воздействия приводит, во-первых, к увеличению длительности переходного процесса на величину Δt , а во-вторых, к появлению ошибки Δx обработки за-

Для получения оптимального переходного процесса в реальной системе при обработке входного воздействия $u(t) = U + \sigma t$, поступающего на вход системы в момент времени $t = 0$, необходимо найти длительности h'_v и амплитуды m_v импульсов оптимального управляющего воздействия, соответствующие параметрам входного воздействия (U, σ). Оптимальный переходный процесс можно получить только в том случае, если управляющее воздействие начинает поступать на вход объекта в момент времени $t = 0^+$, т. е. только в том случае, если задача определения оптимальных управляющих воздействий решается мгновенно.

Однако реальные вычислительные устройства имеют ограниченное быстродействие и решение оптимизационной задачи можно получить только за некоторое конечное время Δt , а следовательно, и управляющее воздействие на объект регулирования можно подать только с задержкой на время Δt относительно момента поступления входного воздействия. Наличие такой задержки приводит к тому, что переходный процесс в системе становится

данного входного воздействия, равной величине $\sigma \Delta t$. Таким образом, в реальной системе в общем случае можно получить только квазиоптимальный переходный процесс, степень близости которого к оптимальному определяется временем, необходимым для решения оптимизационной задачи.

Рассмотрим некоторые способы построения оптимальных дискретных регуляторов и алгоритмы их функционирования, которые позволяют значительно уменьшить время Δt за счет решения оптимизационной задачи не в процессе функционирования регулятора, а на этапе его проектирования. Пусть имеем систему управления, в которой объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ и имеет уровень ограничения по входу $U_{\text{огр}}$. На вход системы поступает ступенчатое воздействие $u(t) = U$ при $t \geq 0$. Необходимо построить дискретный регулятор, который обеспечивает оптимальные переходные процессы на выходе системы при заданной величине входного воздействия $U = U_{\text{max}}$.

Запишем выражения для амплитуд оптимальных управляющих воздействий на входе объекта регулирования при ненулевой начальной скорости объекта (см. табл. 1.8, п. 2) в виде

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= K_0 (U_0 - S_0 \sigma_0); \\ m_1 &= -K'_0 (U_0 - S'_0 \sigma_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

где $K_0 = \frac{b}{\alpha h (1-B)}$; $S_0 = \frac{1}{b} - \frac{hB^2}{1-B}$; $B = e^{-bh}$; $K'_0 = \frac{bB}{\alpha h (1-B)}$; $S'_0 = \frac{1}{b} - \frac{hB}{1-B}$.

Амплитуды управляющих воздействий не будут превышать $U_{\text{огр}}$, если выполнить совместные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{\text{огр}}}{K_0} &\geq \frac{S_0 \sigma_{0\text{max}}}{2} \geq 0; \\ \frac{U_{\text{огр}}}{K'_0} &\geq S'_0 \sigma_{0\text{max}} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Поскольку левые и правые части записанных неравенств являются функциями аргумента h , то используя эти неравенства, можно найти минимальный шаг квантования $h = k^* h_0$, где k^* — целое число, при котором эти неравенства выполняются.

Зададимся вначале значением $h' = h_0$, где h_0 — основной (минимальный) шаг квантования, и найдем $U' = U_{\text{огр}}/K_0$ и $U'' = U_{\text{огр}}/K'_0$ при этом шаге. Если $U'_0 = \min(U', U'') \leq U_{\text{max}}$, то на вход объекта регулирования подаем $U_{\text{огр}}$ и находим время t'_0 , в течение которого выходная координата достигает значения $U_{\text{max}} - U'_0$, из уравнения

$$x(t'_0) = U_{\text{max}} - U'_0 = U_{\text{огр}} \frac{\alpha}{b^2} (bt'_0 - 1 + e^{-bt'_0}).$$

Далее определяем

$$\sigma_0(t'_0) = \sigma'_{0\text{max}} = U_{\text{огр}} \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bt'_0})$$

и проверяем условия (2.70). Если условия не выполняются, то задаемся значением $h' = 2h_0$ и повторяем описанную процедуру. Если снова условия (2.70) не выполняются, то задаемся значением $h' = 3h_0$ и повторяем процедуру. И так до тех пор, пока не определим $h' = h = k^*h_0$, при котором условия (2.70) начинают выполняться. Фиксируем величины t_0 , U_0 и $\sigma_{0\max}$, которые соответствуют началу выполнения условий и рассчитанному значению шага h . Для полученного шага вычисляем амплитуды m_0 и m_1 , а также коэффициенты K_0 , K'_0 , S_0 и S'_0 , необходимые для построения регулятора.

Схема алгоритма расчета дискретного регулятора показана на рис. 2.22. В блоке 1 вводят исходные данные: параметры объекта регулирования α , b , минимальный шаг квантования h_0 , максимальное ступенчатое входное воздействие U_{\max} , $U_{\text{огр}}$. В блоках 2 и 3 задается количество шагов квантования длительностью h_0 в шаге h' и определяется величина $h' = kh_0$. В блоке 4 рассчитываются параметры цифрового регулятора K_0 , K'_0 , S_0 , S'_0 как функции аргумента h' . Величина линейной зоны U_0 определяется в блоке 5 и сравнивается с U_{\max} в блоке 6. Если $U_0 \geq U_{\max}$ (регулятор работает в линейном режиме), величины t_0 и σ_0 принимаются равными нулю (блок 7) и управление передается блоку 12, в котором для найденных значений U_0 и σ_0 рассчитываются величины m_0 и m_1 . Если $U_0 < U_{\max}$ (регулятор работает в нелинейном режиме), рассчитывается время разгона объекта (времени возрастания выходной координаты от значения $x(0) = 0$ до $x(t_0) = U_{\max} - U_0$) при подаче на вход объекта управляющего воздействия $U_{\text{огр}}$ и для t_0 находится $\sigma_0(t_0) = \sigma_{0\max}$ (блок 8). В блоках 9 и 11 проверяются условия (2.70). Если условия не выполняются, управление передается блоку 10, где величина k увеличивается на 1, и далее блоку 3. При выполнении условий (2.70) управление передается блоку 12. Блок 13 выводит рассчитанные параметры h , K_0 , K'_0 , S_0 , S'_0 , U_0 , t_0 , $\sigma_{0\max}$, m_0 , m_1 .

Условия (2.70) можно получить в результате следующих рассуждений. Если $K_0 > K'_0 > 0$ ($K'_0 = BK_0$) и $S_0 > S'_0 > 0$ ($S_0 = S'_0 + hB$), то при $\sigma_0 = 0$ амплитуды управляющих воздействий не превышают $U_{\text{огр}}$, когда $U_0 \leq U_{\text{огр}}/K_0$.

При $\sigma_0 = \sigma_{0\max}$ из условия $|m_0| \leq U_{\text{огр}}$ получаем

$$-U_{\text{огр}}/K_0 \leq (U_0 - S_0\sigma_{0\max}) \leq U_{\text{огр}}/K_0.$$

Подставляя в это неравенство $U_0 = U_{\text{огр}}/K_0$, находим первое из условий (2.70). Чтобы гарантировать отсутствие перерегулирования в переходном процессе на выходе объекта регулирования, величину m_1 выбираем из условия $-U_{\text{огр}} \leq m_1 \leq 0$ или

$$-U_{\text{огр}}/K'_0 \leq -U_0 + S'_0\sigma_{0\max} \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство $U_0 = U_{\text{огр}}/K_0$, получаем

$$-(1 - B)U_{\text{огр}}/K'_0 \leq S'_0\sigma_{0\max} \leq U_{\text{огр}}/K_0,$$

откуда при $\sigma_{0\max} > 0$ получаем второе условие (2.70).

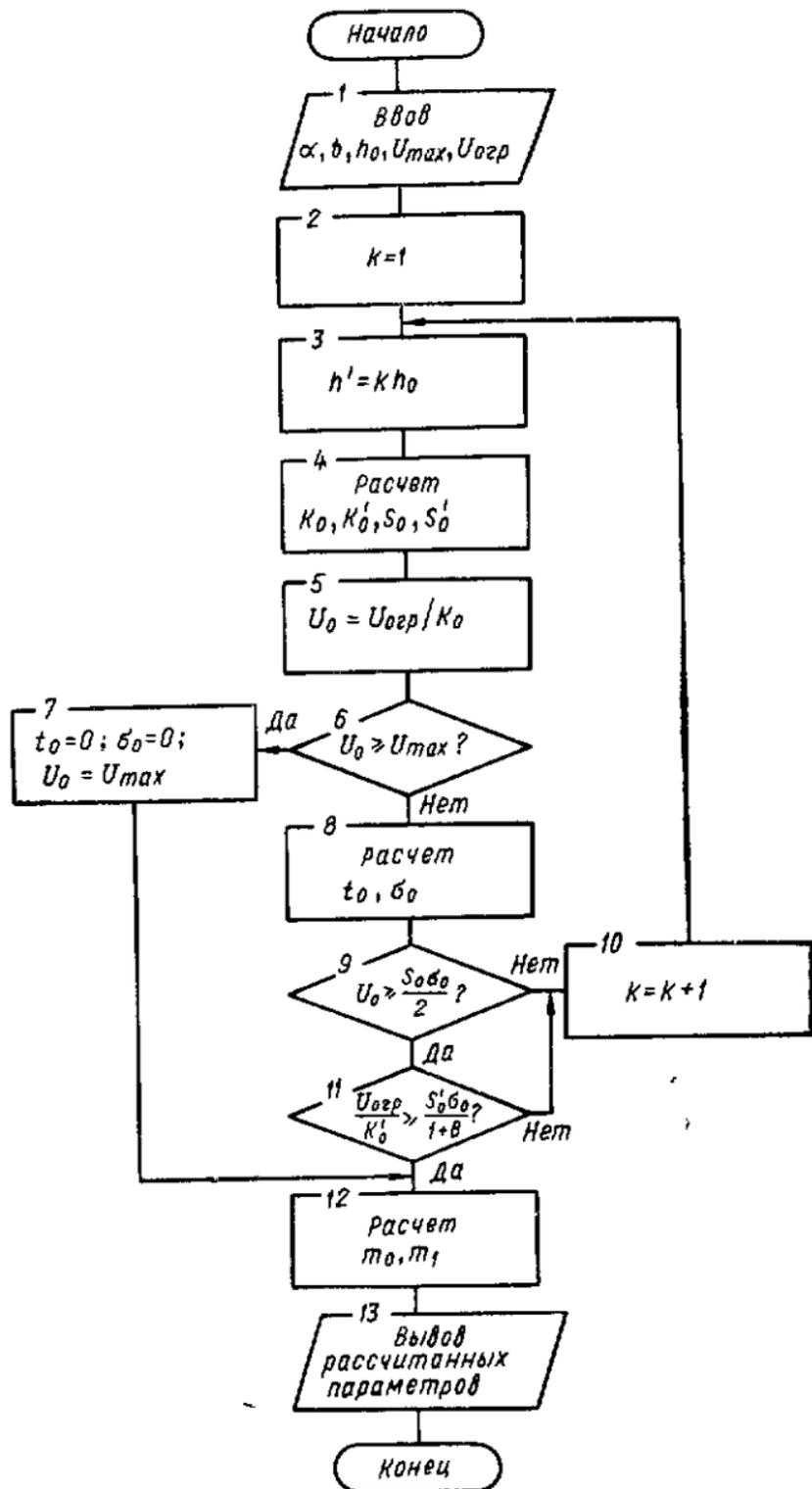


Рис. 2.22

Структурная схема системы управления с оптимальным для ступенчатого воздействия (величиной U_{\max}) дискретным регулятором показана на рис 2 23, а. Объект регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ имеет нелинейность типа «насыщение» (см рис 2 13, б). Передаточная функция цифрового регулятора $M^*(z) = M(z)/(1+z^{-1})$, где $M(z) = m_0 + m_1 z^{-1}$. Нелинейные элементы НЭ1 и НЭ2 имеют характеристики, изображенные соответственно на рис 2 23, б и в. Ключи КЛ1 и КЛ2 замкнуты при нулевом сигнале и разомкнуты при ненулевом сигнале на их управляющем входе. При подаче на вход

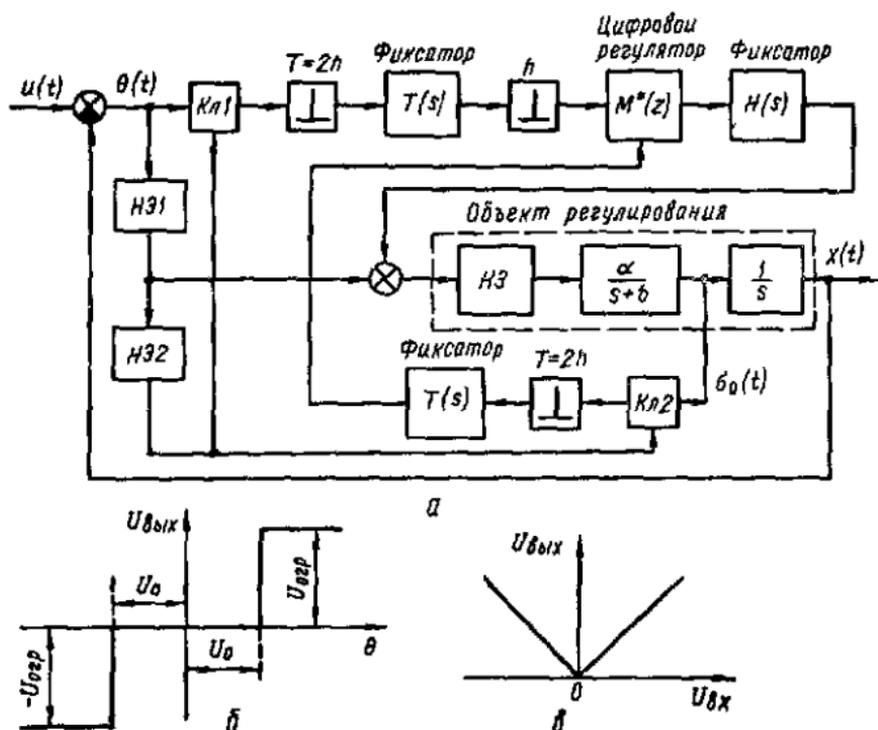


Рис 2.23

системы скачка величиной U_{\max} , дискретный регулятор работает следующим образом. Если $U_{\max} > U_0$, ключи $КЛ1$ и $КЛ2$ разомкнуты и на вход объекта подается величина $U_{\text{огр}}$ до тех пор, пока выходная координата системы не достигнет $U_{\max} - U_0$. При достижении выходной координатой указанного значения ошибка системы $\theta(t)$ становится равной U_0 , ключи $КЛ1$ и $КЛ2$ замыкаются и на входы цифрового регулятора поступают скачок ошибки величиной U_0 и скачок скорости величиной σ_{\max} . Цифровой регулятор формирует управляющие воздействия на входе объекта регулирования в соответствии с выражениями (2 69).

Переходные процессы в системе рис. 2 23, а при параметрах объекта регулирования $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $U_{\text{огр}} = 10$ и основном (минимальном) шаге квантования в дискретном регуляторе с $h_0 = 0,02 \text{ с}$ показаны на рис 2 24. При $U_{\max} = 5$ время переключения $t_0 = 0,257 \text{ с}$, ошибка при переключении $U_0 = 2,19$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 20,12 \text{ с}^{-1}$,

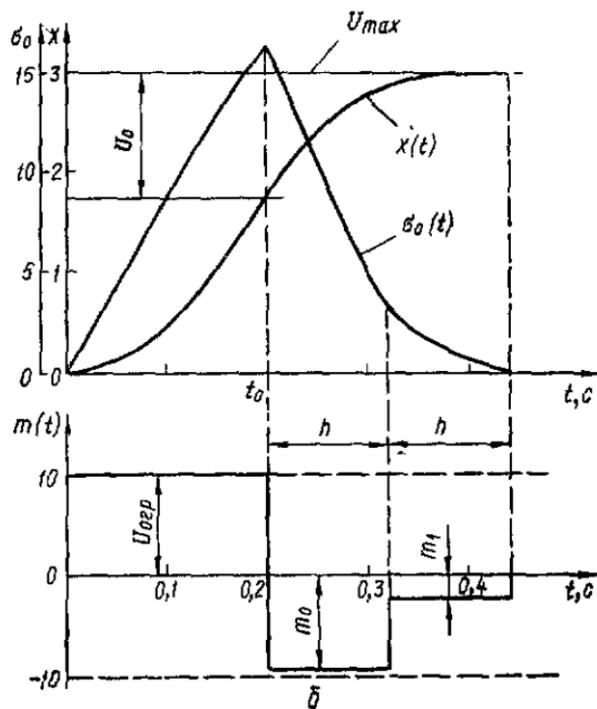
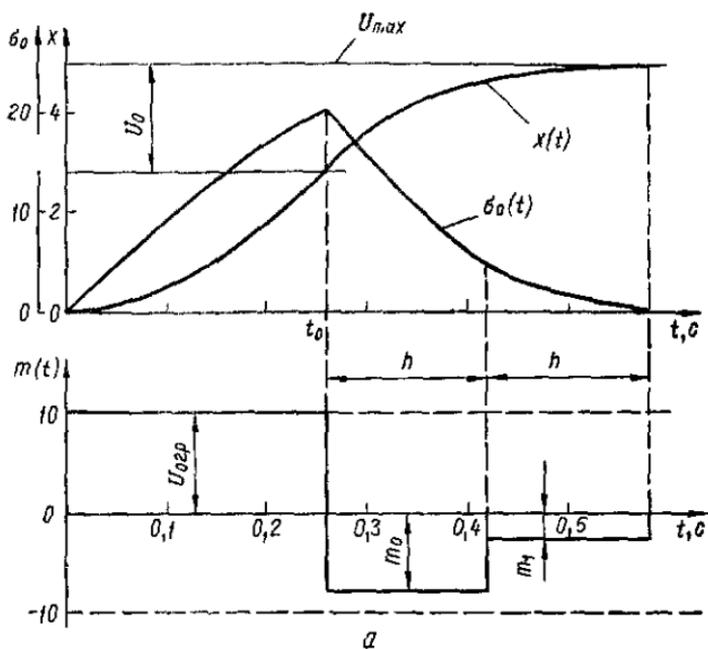


Рис. 224

шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^* h_0 = 0,16$ с ($k^* = 8$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -7,62$ и $m_1 = -2,21$, время регулирования $t_p = t_0 + 2h \approx 0,58$ с.

При $U_{\max} = 3$ время переключения $t_0 = 0,198$ с, ошибка при переключении $U_0 = 1,28$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 16,33$ с⁻¹, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^* h_0 = 0,12$ с ($k^* = 6$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -9,39$ и $m_1 = -2,09$ (рис. 2.24, б), время регулирования $t_p = t_0 + 2h \approx 0,44$ с. Ана-

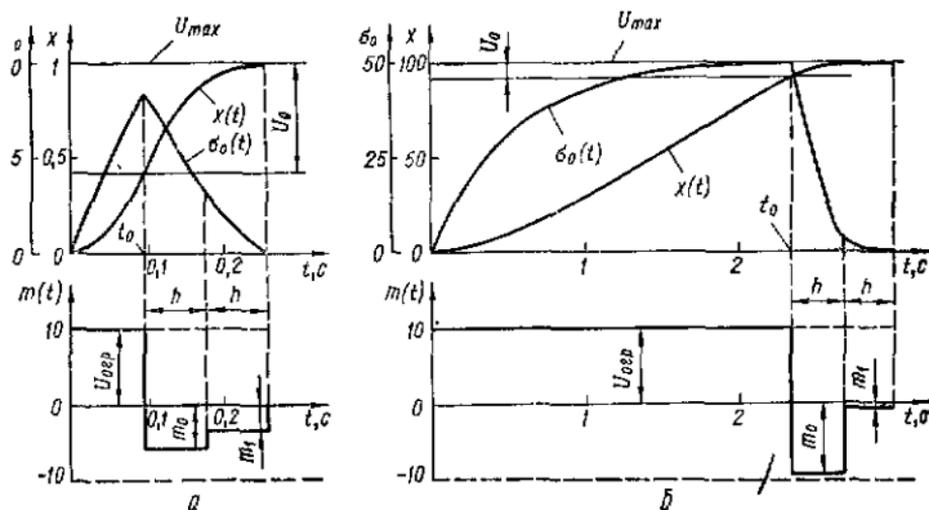


Рис. 2.25

логичным образом дискретный регулятор работает и при отрицательных скачках входного сигнала $u(t)$.

Дискретный регулятор, который рассчитан на скачок U_{\max} , работает и при скачках $U < U_{\max}$, обеспечивая меньшее время переключения t_0 , но сохраняя расчетную величину ошибки при переключении U_0 и шаг квантования h в цифровом регуляторе, соответствующие величине U_{\max} . Например, если на вход системы с дискретным регулятором, рассчитанным на величину скачка $U_{\max} = 5$, подать скачок входного сигнала величиной $U = 3$, то время переключения $t_0 \approx 0,14$ и $h = 0,16$ с, т. е. время регулирования $t_p = t_0 + 2h \approx 0,46$ с, что немного больше, чем, в регуляторе, рассчитанном на скачок величиной $U_{\max} = 3$.

Чем больше величина скачка U_{\max} при фиксированном $U_{\text{огр}}$, тем больше время регулирования $t_p = t_0 + 2h$. С увеличением U_{\max} уменьшаются соотношения U_0/U_{\max} и $2h/t_0$. На рис. 2.25, а показаны переходные процессы в системе при $U_{\max} = 1$, времени переключения $t_0 = 0,096$ с, величине ошибки при переключении $U_0 = 0,59$, выходной скорости объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 8,65$ с⁻¹, шаге квантования в цифровом регуляторе $h = k^* h_0 = 0,08$ с ($k^* = 4$), амплитудах управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -5,93$ и $m_1 = -3,45$, время регулирования $t_p = t_0 + 2h \approx 0,26$ с. При $U_{\max} = 100$ (рис. 2.25, б) время пере-

ключения $t_0 = 2,33$ с, ошибка при переключении $U_0 = 0,03$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 49,53$ с⁻¹ (близка к предельной, равной $U_{\text{огр}}\alpha/b = 50$ с⁻¹), шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^*h_0 = 0,34$ с ($k^* = 17$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -9,17$ и $m_1 = -0,51$, время регулирования $t_p = t_0 + 2h = 3,01$ с. Таким образом, если при $U_{\max} = 1$ отношения U_0/U_{\max} и $2h/t_0$ равны соответственно 0,59 и 1,67, то при $U_{\max} = 100$ эти соотношения равны 0,084 и 0,292.

Если на вход системы поступает линейно изменяющееся воздействие $u(t) = U_{\max} + \sigma_1 t$ при $t \geq 0$, то амплитуды оптимальных управляющих воздействий на входе объекта регулирования при ненулевой начальной скорости объекта (см. табл. 1.8, п.2)

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= K_0 (U_0 + S_1 \sigma_1 - S_0 \sigma_0); \\ m_1 &= -K'_0 (U_0 + S'_1 \sigma_1 - S'_0 \sigma_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

где $S_1 = 2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B}$; $S'_1 = 2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)}$, а остальные коэффициенты определяются по формулам (2.69).

Амплитуды управляющих воздействий не превышают $U_{\text{огр}}$, если выполнить совместные условия

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{огр}}/K_0 &\geq S_0 \sigma_{0\max}/2 > 0; \\ -(1-B)U_{\text{огр}}/K'_0 &\leq S'_0 \sigma_{0\max} + h\sigma_1/B \leq U_{\text{огр}}/K_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Условия (2.72) можно получить в результате следующих рассуждений. При $\sigma_0 = 0$ амплитуды управляющих воздействий не превышают $U_{\text{огр}}$, когда $U_0 \leq U_{\text{огр}}/K_0 - S_1 \sigma_1$. При $\sigma_0 = \sigma_{0\max}$ из условия $|m_0| \leq U_{\text{огр}}$ определяем

$$-U_{\text{огр}}/K_0 \leq (U_0 + S_1 \sigma_1 - S_0 \sigma_{0\max}) \leq U_{\text{огр}}/K_0.$$

Подставляя в это неравенство $U_0 = U_{\text{огр}}/K_0 - S_1 \sigma_1$, находим первое из условий (2.72). Чтобы гарантировать отсутствие переуправления в переходном процессе на выходе объекта регулирования, величину m_1 выбираем из условия $-U_{\text{огр}} \leq m_1 \leq 0$ или

$$-U_{\text{огр}}/K'_0 \leq -U_0 - S'_1 \sigma_1 + S'_0 \sigma_{0\max} \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство $U_0 = U_{\text{огр}}/K_0 - S_1 \sigma_1$, находим

$$-(1-B)U_{\text{огр}}/K'_0 \leq (S_1 - S'_1) \sigma_1 + S'_0 \sigma_{0\max} \leq U_{\text{огр}}/K_0.$$

откуда получаем второе из условий (2.72).

Используя неравенства (2.72), можно найти минимальный шаг $h = k^*h_0$, где k^* — целое число, при котором эти неравенства выполняются.

Зададимся вначале значением $h' = h_0$, где h_0 — основной (минимальный) шаг квантования, и найдем

$$U' = U_{\text{огр}}/K_0 - S_1 \sigma_1 \quad \text{и} \quad U'' = U_{\text{огр}}/K'_0 - S'_1 \sigma_1$$

при этом шаге.

Если $U'_0 = \min(U', U'') < U_{\max}$, то на вход объекта регулирования подаем $U_{\text{огр}}$ и определяем время t'_0 , в течение которого выходная координата достигает значения $U_{\max} + \sigma_1 t'_0 - U'_0$, из уравнения

$$x(t'_0) = U_{\max} + \sigma_1 t'_0 - U'_0 = U_{\text{огр}} \frac{\alpha}{b^2} (bt'_0 - 1 + e^{-bt'_0}).$$

Далее вычисляем

$$\sigma_0(t'_0) = \sigma'_{0\max} = U_{\text{огр}} \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bt'_0})$$

и проверяем условия (2.72). Если условия не выполняются, то задаемся значением $h' = 2h_0$ и повторяем описанную процедуру. Если снова условие (2.72) не выполняется, то задаемся значением $h' = 3h_0$. И так до тех пор, пока не определим $h' = h = k^* h_0$, при котором условия (2.72) начинают выполняться. Фиксируем величины t_0 , U_0 и $\sigma_{0\max}$, которые соответствуют началу выполнения условий и рассчитанному шагу h . Для полученного шага вычисляем амплитуды m_0 , m_1 , а также коэффициенты K_0 , K'_0 , S_0 , S'_0 , S_1 и S'_1 , необходимые для построения регулятора.

Структурная схема системы управления с оптимальным для входного воздействия $u(t) = U_{\max} + \sigma_1 t$ дискретным регулятором изображена на рис. 2.26. Эта схема отличается от схемы рис. 2.23, а дополнительным каналом, состоящим из измерителя скорости входного воздействия σ_1 , ключа $K_{\lambda 3}$, который замкнут при нулевом сигнале и разомкнут при ненулевом сигнале на его управляющем входе, мгновенного ключа с шагом квантования $T = 2h$ и фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией $T(s) = (1 - e^{-Ts})/s$.

При подаче на вход системы воздействия $u(t) = U_{\max} + \sigma_1 t$ при $t \geq 0$ дискретный регулятор работает следующим образом. Если $U_{\max} > U_0$, ключи $K_{\lambda 1} - K_{\lambda 3}$ разомкнуты и на вход объекта подается напряжение $U_{\text{огр}}$ до тех пор, пока выходная координата системы не достигнет величины $U_{\max} + \sigma_1 t - U_0$. При достижении выходной координатой указанного значения ошибка системы $\Theta(t) = U_0$, ключи $K_{\lambda 1} - K_{\lambda 3}$ замыкаются и на входы цифрового регулятора поступают скачок ошибки величиной U_0 , скачок скорости входного воздействия величиной $\sigma_1(t_0)$ и скачок скорости изменения выходной координаты объекта величиной $\sigma_0(t_0) = \sigma'_{0\max}$. Цифровой регулятор формирует управляющие воздействия на входе объекта регулирования в соответствии с выражениями (2.71).

Переходные процессы в системе на рис. 2.26 при параметрах объекта регулирования $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $U_{\text{огр}} = 10$ и основном (минимальном) шаге квантования в дискретном регуляторе $h_0 = 0,02 \text{ с}$ показаны на рис. 2.27 и 2.28. При $u(t) = 3 - 5t$ (рис. 2.27, а) время переключения $t_0 \approx 0,12 \text{ с}$, ошибка при переключении $U_0 = 1,75$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma'_{0\max} = 10,58 \text{ с}^{-1}$, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^* h_0 = 0,12 \text{ с}$ ($k^* = 6$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -5,8$; $m_1 = -6,26$. Время регулирования $t_p = t_0 + 2h = 0,36 \text{ с}$. При $u(t) = 3 - 20t$ (рис. 2.27, б) время переключения $t_0 \approx 0,015 \text{ с}$, ошибка при

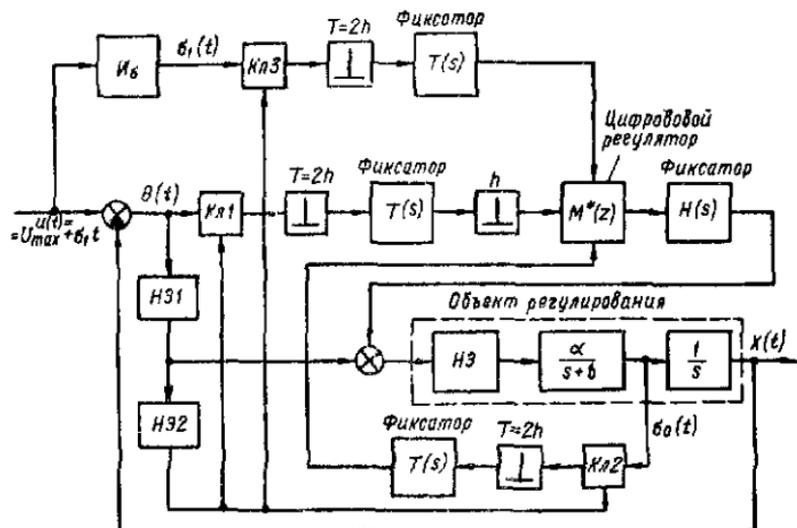
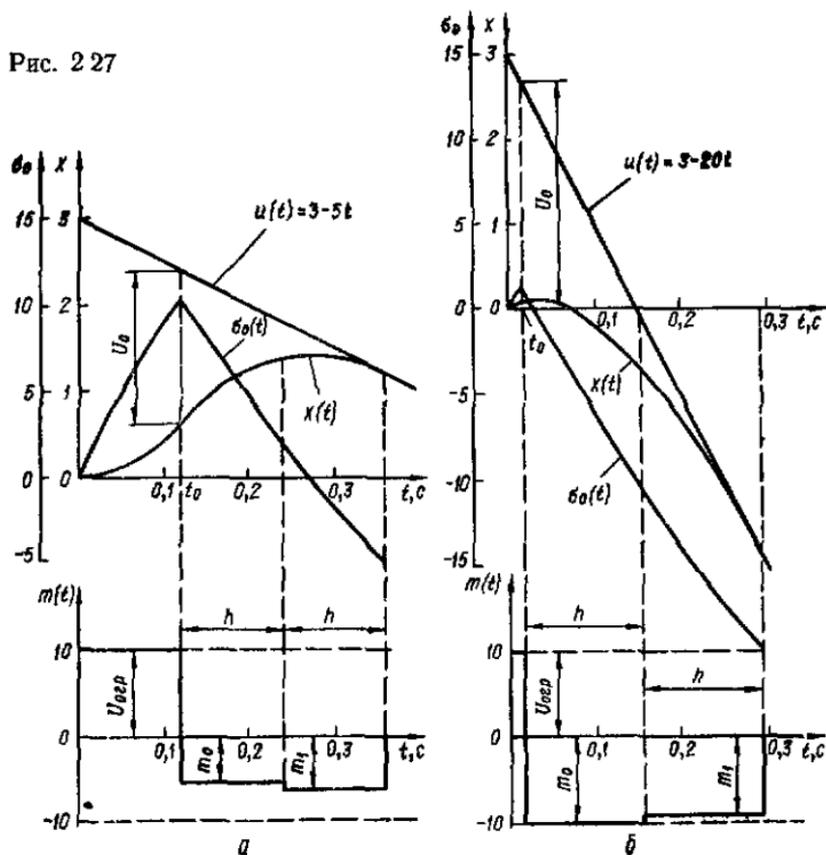


Рис. 2 26

Рис. 2 27



переключении $U_0 = 2,69$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 1,46 \text{ с}^{-1}$, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^*h_0 = 0,14 \text{ с}$ ($k^* = 7$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -9,92$; $m_1 = -9,57$. Время регулирования $t_p = t_0 + 2h = 0,295 \text{ с}$. С увеличением отрицательной скорости входного воздействия время переключения t_0 стремится к нулю и дискретный регулятор работает как регулятор с равномерным шагом h , выбранным из условий $|m_0| \leq U_{\text{огр}}$ и $|m_1| < U_{\text{огр}}$.

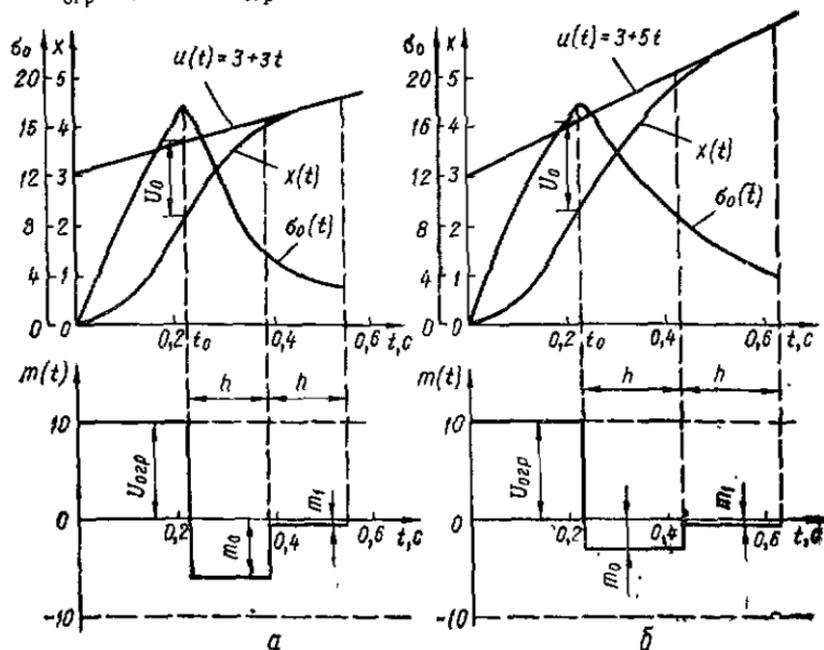


Рис. 2.28

При $u(t) = 3 + 3t$ (рис. 2.28, а) время переключения $t_0 \approx 0,225 \text{ с}$, ошибка при переключении $U_0 \approx 1,48$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 18,12 \text{ с}^{-1}$, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^*h_0 = 0,16 \text{ с}$ ($k^* = 8$), амплитуды управляющих воздействий на входе объекта $m_0 = -5,88$; $m_1 = -0,52$. Время регулирования $t_p = t_0 + 2h = 0,545 \text{ с}$.

При $u(t) = 3 + 5t$ (рис. 2.28, б) время переключения $t_0 \approx 0,23 \text{ с}$, ошибка при переключении $U_0 = 1,83$, выходная скорость объекта при переключении $\sigma_{0\max} = 18,6 \text{ с}^{-1}$, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = k^*h_0 = 0,2 \text{ с}$ ($k^* = 10$), амплитуды управляющих воздействий $m_0 = -2,84$; $m_1 = 0,14$. Время регулирования $t_p = t_0 + 2h = 0,63 \text{ с}$. С увеличением положительной скорости входного воздействия увеличивается время переключения t_0 и шаг квантования в цифровом регуляторе h .

Рассмотрим систему управления (рис. 2.29, а), в которой объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = a[s(s+b)]^{-1}$ и имеет уровень ограничения по входу

$U_{огр}$, а устройство сравнения имеет уровень ограничения по выходу $\Theta_{огр}$. На вход системы поступает ступенчатое входное воздействие $u(t) = U$ при $t \geq 0$. Необходимо построить дискретный регулятор, который обеспечивает оптимальный (без перерегулирования, с минимальным временем регулирования) переходной процесс на выходе системы при заданном входном воздействии $U = U_{max}$.

Допустим, что устройство сравнения линейное. Тогда можно использовать дискретный регулятор, изображенный на рис. 2.23. При конкретных параметрах объекта регулирования и минимальном (основном) шаге квантования h_0 для этого регулятора можно

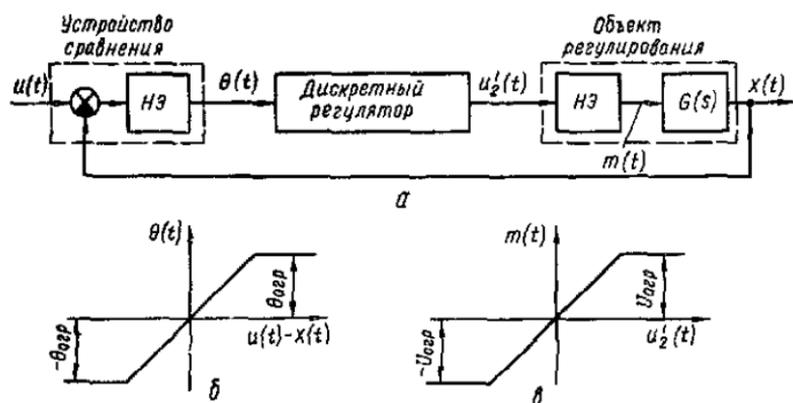


Рис. 2.29

построить зависимости времени регулирования t_p , ошибки при переключении U_0 и выходной скорости объекта при переключении σ_{0max} от скачка входного воздействия U_{max} . Эти зависимости при параметрах объекта $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $U_{огр} = 10$ и шаге $h_0 = 0,01 \text{ с}$ рассчитаны по алгоритму на рис. 2.22 и построены на рис. 2.30, а. Предельная скорость объекта определяется как $\sigma_{0пред} = U_{огр} \alpha/b$. Предельной скорости $\sigma_{0пред}$ соответствует предельная ошибка при переключении U_0^* . В свою очередь, величинам $\sigma_{0пред}$ и U_0^* соответствует определенное (максимальное) значение шага квантования h^* в цифровом регуляторе. Учиывая, что

$$U_{огр}/K_0(h^*) = U_0^* = h^*(1 - e^{-bh^*}) \sigma_{0пред}, \quad (2.73)$$

из условий (2.70) при $\sigma_{0max} = \sigma_{0пред}$ находим следующее transcendентное неравенство для определения h^* :

$$h^*(1 - e^{-bh^*}) \geq \max \left\{ \frac{S_0(h^*)}{2}; S'_0(h^*) \right\} \quad (2.74)$$

(если величину h вычислять не как дискретную kh_0 , k — целое число, а как непрерывную, то неравенство преобразуется в равенство). Значение U_0^* для рассчитанного h^* можно определить из выражения (2.73), при этом значение U_0^* для дискретного

аргумента $h^* = kh_0$ превышает значение U_0^* , рассчитанное для непрерывного аргумента h^* (с уменьшением минимального (основного) шага h_0 это различие становится незначительным) Из неравенства (2.74) видно, что шаг квантования h^* зависит только от постоянной времени объекта регулирования (частоты сопряжения b)

Для указанных параметров объекта и непрерывного аргумента h получаем следующие значения $h^* \approx 0,328$ с; $U_0^* \approx 7,92$ и $\sigma_{0 \text{ пред}} = 50 \text{ с}^{-1}$. При $h_0 = 0,01$ с получаем $h^* = 0,33$ с и $U_0^* \approx 7,97$. При $h_0 = 0,02$ с получаем $h^* = 0,34$ с и $U_0^* \approx 8,39$.

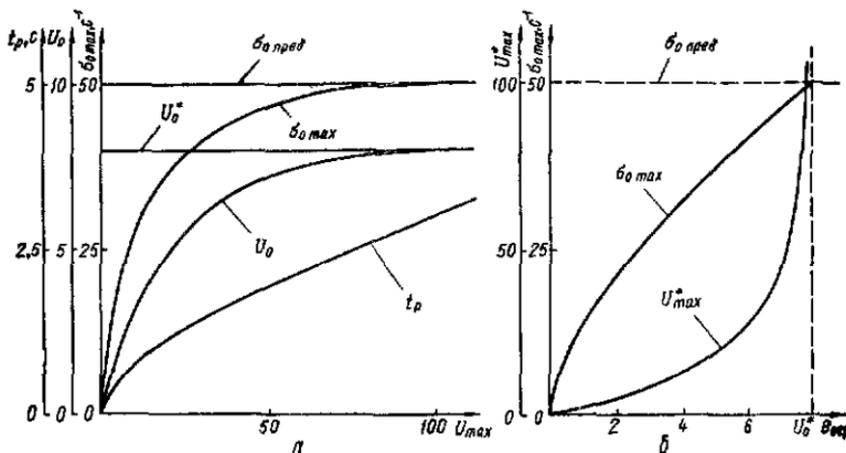


Рис. 2.30

Рассмотрим систему рис. 2.29, а с нелинейным устройством сравнения (рис. 2.29, б). Если $\Theta_{\text{огр}} > U_0^*$, то можно использовать дискретный регулятор, изображенный на рис. 2.23, и выполнить расчет этого регулятора по алгоритму на рис. 2.22. Если $\Theta_{\text{огр}} \leq U_0^*$, то для заданного $\Theta_{\text{огр}}$ выбираем ближайшее (насколько позволяет минимальный (основной) шаг h_0) значение $U_0 \leq \Theta_{\text{огр}}$ из условия

$$U_0 = \frac{U_{\text{огр}} \alpha h (1 - e^{-bh})}{b} \leq \Theta_{\text{огр}}. \quad (2.75)$$

Выбранному таким образом значению U_0 соответствует определенный шаг h , для которого по формуле (2.69) можно рассчитывать параметры K_0 , K_0 , S_0 и S_0 для цифрового регулятора

Для полученных значений U_0 и h согласно неравенствам (2.70) находим

$$\sigma_{0 \text{ max}} = \min [2U_0/S_0, U_0/S_0 b] \quad (2.76)$$

и время t_0^* , необходимое для нарастания скорости до этого значения, из уравнения

$$\sigma_{0 \text{ max}} = \sigma_{0 \text{ пред}} (1 - e^{-bt_0^*}). \quad (2.77)$$

Выбранному значению U_0 соответствует не только определенная скорость $\sigma_{0\max}$, но и определенное значение $U_{\max} = U_{\max}^*$ (рис. 2.30, а), которое можно найти из выражения

$$U_{\max}^* = U_0 + \sigma_0 \text{ пред } \frac{1}{b} (bt_0^* - 1 + e^{-bt_0^*}). \quad (2.78)$$

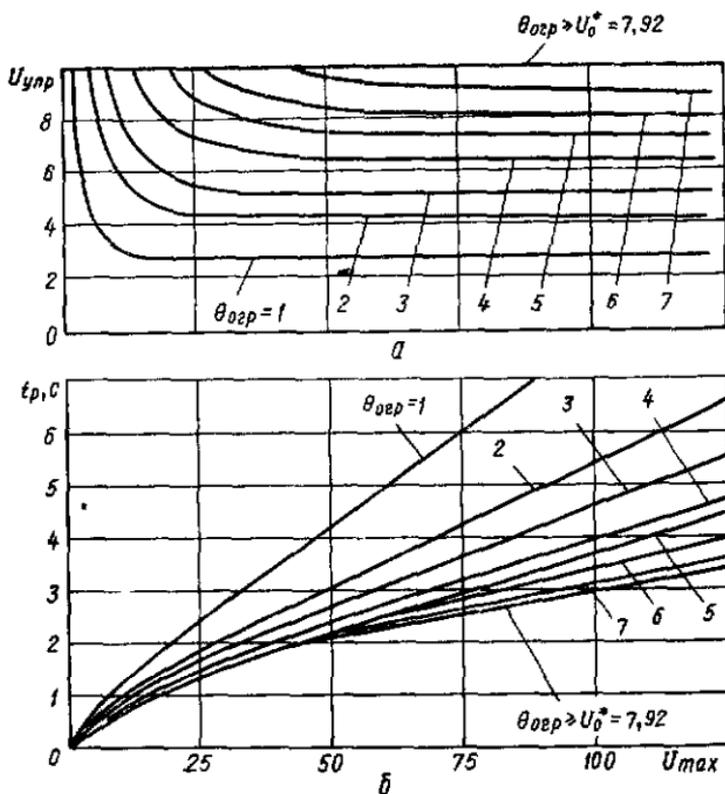


Рис 231

Расчетанные по выражениям (2.75)—(2.78) при указанных параметрах объекта регулирования зависимости $\sigma_{0\max}$ и U_{\max}^* от $\theta_{огр}$ построены на рис 2.30, б

Если полученное значение U_{\max}^* больше или равно заданному входному воздействию U_{\max} , то можно использовать дискретный регулятор, изображенный на рис 2.23, и выполнить расчет этого регулятора по алгоритму на рис 2.22 на заданное входное воздействие U_{\max} . Если же полученное значение U_{\max}^* меньше заданного входного воздействия U_{\max} , то вместо управляющего воздействия $U_{огр}$, подаваемого на вход объекта регулирования в течение времени t_0^* , необходимо подавать на вход объекта новое управляющее воздействие $U_{упр} < U_{огр}$ в течение другого времени t_0 . Два новых неизвестных $U_{упр}$ и t_0 можно вычислить в ре-

зультате решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{0 \max} &= \frac{U_{\text{упр}} \alpha}{b} (1 - e^{-bt_0}); \\ U_{\max} - U_0 &= \frac{U_{\text{упр}} \alpha}{i_0^2} (bt_0 - 1 + e^{-bt_0}). \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

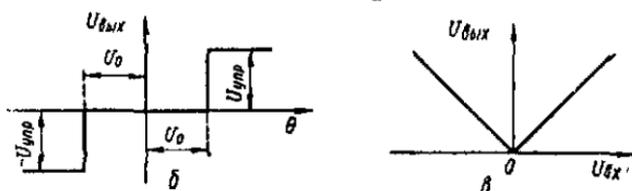
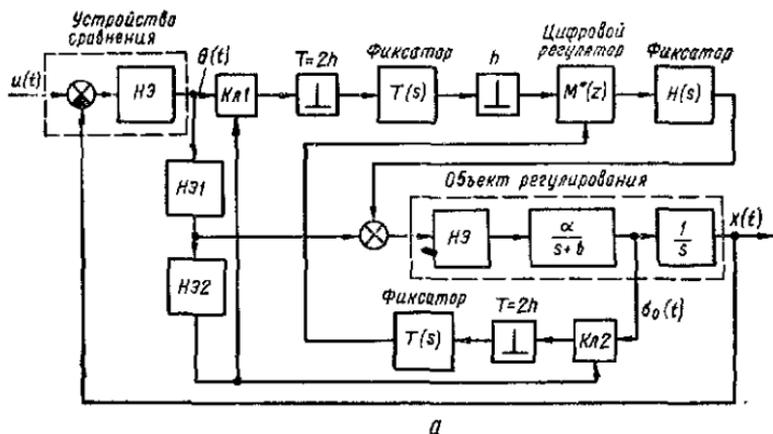


Рис. 2.32

В этой системе уравнений величины $\sigma_{0 \max}$ и U_0 рассчитаны ранее по выражениям (2.75) и (2.76), а U_{\max} — заданное воздействие на входе системы. Время отработки входного воздействия величиной U_{\max} определяется как $t_p = t_0 + 2h$, где шаг h в цифровом регуляторе соответствует U_0 .

Зависимости $U_{\text{упр}}$ и t_p от величины U_{\max} при различных $\theta_{\text{огр}}$ и заданных параметрах объекта регулирования построены на рис. 2.31, а, б (при этом каждой кривой на рисунках соответствует определенное значение U_0 и шага h).

Хотя расчет дискретного регулятора для системы рис. 2.29, а с устройством сравнения, имеющим нелинейность типа «насыщение» (рис. 2.29, б), и объектом, имеющим нелинейность типа «насыщение» (рис. 2.29, в), значительно сложнее по сравнению с расчетом дискретного регулятора для этой системы, имеющей только одну нелинейность в объекте, схема регулятора (рис. 2.32) аналогична схеме регулятора, изображенного на рис. 2.23. Единственное отличие заключается в том, что нелинейный элемент $HЗ$ в системе на рис. 2.32 имеет уровень ограничения не $U_{\text{огр}}$, а $U_{\text{упр}} \leq U_{\text{огр}}$ (рис. 2.32, б).

Схема алгоритма расчета параметров регулятора для систем управления с передаточной функцией объекта $G(s) = \alpha [s(s + b)]^{-1}$ и двумя нелинейностями типа «насыщение» (рис. 2.29 и 2.32) показана на рис. 2.33 [27]. Блок 1 вводит исходные данные: параметры объекта регулирования α , b , $U_{огр}$; уровень ограничения $HЭ$ устройства сравнения $\Theta_{огр}$; минимальный шаг квантования h_0 ; максимальное входное ступенчатое воздействие U_{max} .

Блок 2 рассчитывает предельный шаг квантования h^* и предельное U_0^* при заданных параметрах объекта регулирования и величине h_0 . Блок 3 сравнивает рассчитанную величину U_0^* с $\Theta_{огр}$. При $\Theta_{огр} > U_0^*$ управление передается блоку 12 (это соответствует случаю, когда нелинейностью на выходе устройства сравнения можно пренебречь), в противном случае — блоку 4. В блоках 4—8 производится поиск максимального шага квантования $h = kh_0$ (k — целое число), при котором линейная зона U_0 не превышает $\Theta_{огр}$. Блок 9 рассчитывает параметры регулятора K_0 , K'_0 , S_0 , S'_0 , U_0 как функции аргумента h . В блоке 10 выполняется расчет максимальной скорости объекта регулирования при переключении и граничного входного воздействия U_{max}^* . Входное воздействие U_{max} сравнивается с рассчитанным U_{max}^* в блоке 11. Если $U_{max} < U_{max}^*$, то управление передается блоку 12 ($\Theta_{огр}$ можно пренебречь), в противном случае — блоку 20, в котором рассчитываются время разгона t_0 и напряжение управления $U_{упр}$. Далее управление передается блоку 21.

В блоке 12 в качестве $U_{упр}$ принимается значение $U_{огр}$ и задается начальный шаг дискретизации h . В блоке 13 значение h увеличивается на h_0 и для полученного h блок 14 рассчитывает параметры регулятора K_0 , K'_0 , S_0 , S'_0 , U_0 . Рассчитанная линейная зона U_0 и максимальное входное воздействие U_{max} сравниваются в блоке 15. Если $U_0 > U_{max}$, управление передается блоку 19 (это соответствует работе регулятора в линейном режиме), где t_0 и σ_{0max} принимаются равными нулю, а $U_0 = U_{max}$, и управление передается блоку 21.

В противном случае управление передается блоку 16, который рассчитывает время разгона t_0 и скорость объекта при переключении σ_{0max} . Блоки 17 и 18 проверяют условия по ограничению σ_{0max} . При невыполнении хотя бы одного из условий управление передается блоку 13 для повторного расчета параметров регулятора при увеличенном на h_0 шаге регулирования h . При совместном выполнении условий управление передается блоку 21, где для найденных значений U_0 и σ_{0max} рассчитываются управляющие воздействия на выходе регулятора m_0 и m_1 .

Блок 22 выводит рассчитанные параметры регулятора и выходные сигналы при заданном входном воздействии U_{max} .

Рассчитаем по алгоритму на рис. 2.33 переходные процессы в системе рис. 2.32, а при следующих параметрах объекта регулирования $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$, $U_{огр} = 10$, минимальном (основном) шаге квантования и в дискретном регуляторе $h_0 = 0,01 \text{ с}$ уровне ограничения в устройстве сравнения $\Theta_{огр} = 2$

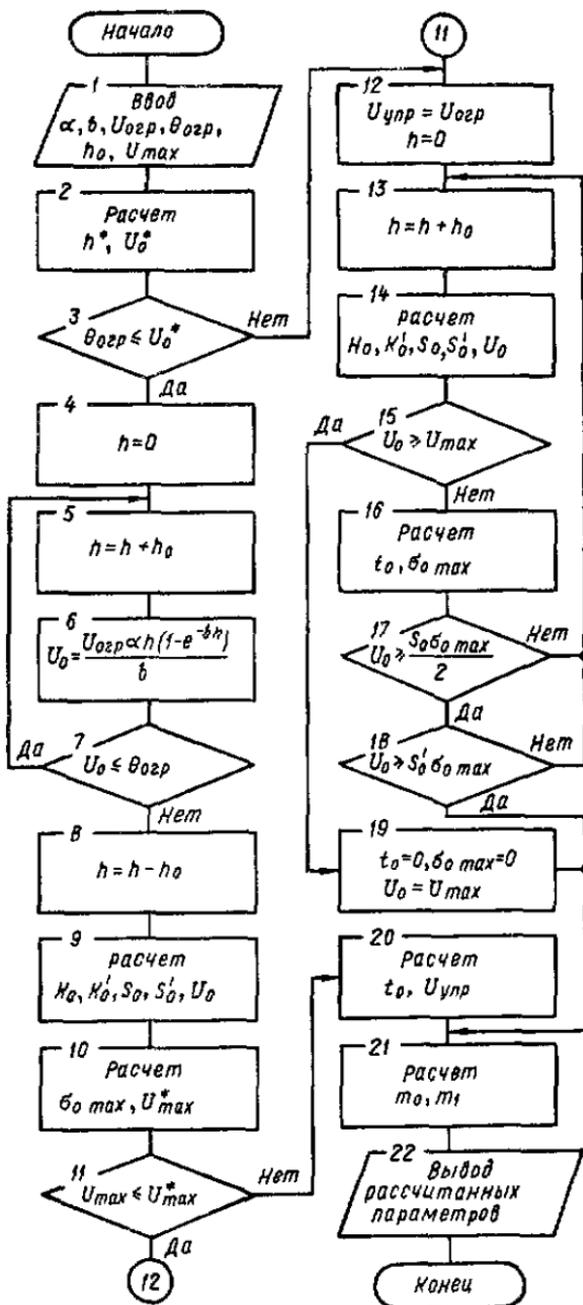


Рис. 2.33

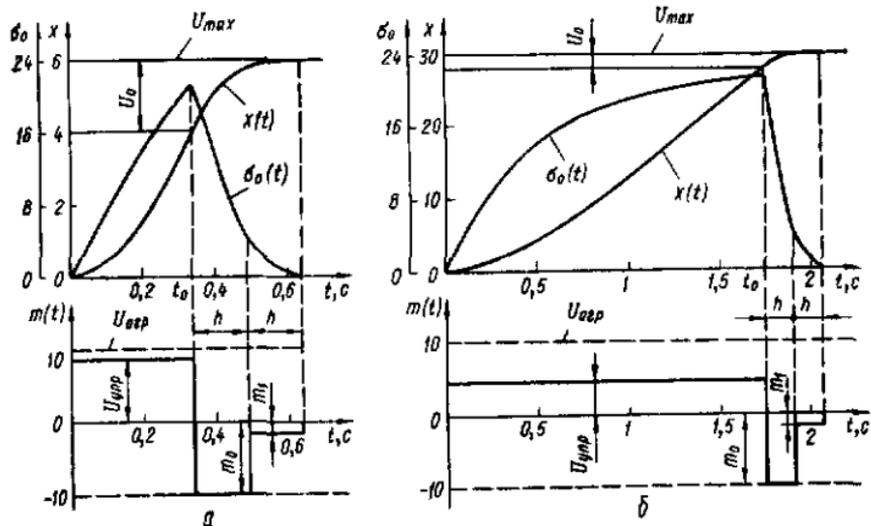


Рис. 234

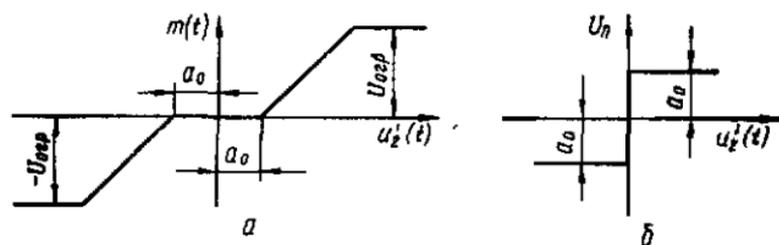


Рис. 235

для двух значений ступенчатого воздействия на входе системы: $U_{\max} = 6$ и $U_{\max} = 30$.

При $U_{\max} = 6$ (рис. 2.34, а) имеем: $U_{\text{упр}} = 8,608$, $t_0 \approx 0,342$ с; $m_0 \approx -9,999$; $m_1 \approx -1,619$. При $U_{\max} = 30$ (рис. 2.34, б): $U_{\text{упр}} \approx 4,393$; $t_0 \approx 1,763$ с; $m_0 \approx -9,999$; $m_1 \approx -1,619$. При этом в обоих случаях дискретный регулятор имеет ошибку при переключении $U_0 \approx 1,944$, шаг квантования в цифровом регуляторе $h = 0,15$ с, выходную скорость объекта при переключении $\sigma_{0 \max} \approx 21,317$ с⁻¹ и $U_{\max}^* \approx 5,178$.

Для данного примера $\Theta_{\text{огр}} < U_0^*$ и $U_{\max} > U_{\max}^*$. В системе управления (рис. 2.29, а) объект регулирования может иметь нелинейность типа зона нечувствительности + насыщение (рис. 2.35, а). Зона нечувствительности компенсируется обычно дополнительной нелинейностью с релейной характеристикой (рис. 2.35, б). На рис. 2.35, в изображена структурная схема системы управления, в которой устройство сравнения имеет нелинейность типа «насыщение» (рис. 2.29, б), а объект регулирования — нелинейность типа зона нечувствительности + насыщение (рис. 2.35, а). Дискретный регулятор, обеспечивающий оптимальные переходные процессы при ступенчатых входных воздействиях, содержит нелинейные элементы $HЭ1 - HЭ3$ с соответствующими характеристиками (см. рис. 2.32, б, в и 2.35 б). Нелинейный элемент $HЭ3$ и дополнительный сумматор служат для компенсации зоны нечувствительности. Расчет регулятора в системе на рис. 2.35, в такой же, как и регулятора в системе на рис. 2.32, а и выполняется по алгоритму на рис. 2.33.

2.4. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Используя аппарат w -преобразования и понятие псевдочастоты, можно построить частотные характеристики линейной импульсной системы (см. рис. 1.1, а) и проводить анализ устойчивости, частотных показателей качества работы системы, а также изучить влияние изменения параметров объекта регулирования на устойчивость и частотные показатели качества.

Дискретную передаточную функцию системы на рис. 1.1, а в разомкнутом состоянии можно записать в виде

$$K_p(z) = W(z)HG(z), \quad (2.80)$$

где дискретная передаточная функция объекта регулирования с учетом фиксатора нулевого порядка

$$\begin{aligned} HG(z) &= Z\{H(s)G(s)\} \approx Z\left\{\frac{1-e^{-hs}}{s}G(s)\right\} = \\ &= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Пусть объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ и в системе на рис. 1.1, а имеется

оптимальный для ступенчатых входных возмущений регулятор с передаточной функцией (см. табл. 1.1, п 2)

$$W(z) = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = K_0 \frac{z + b_1}{z + a_1}, \quad (2.82)$$

где $K_0 = b[\alpha h(1-B)]^{-1}$, $b_1 = -B$, $a_1 = [1 - B(1 + bh)](1 - B)^{-1}$; $B = e^{-bh}$.

Тогда, на основании формулы (2.81), дискретную передаточную функцию объекта регулирования с фиксатором нулевого порядка на входе запишем в виде

$$\begin{aligned} HG(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\alpha}{s^2(s+b)} \right\} = \\ &= \frac{\alpha h}{b(z-1)} - \frac{\alpha(1-B)}{b^2(z-B)}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Комплексная переменная z и частота ω связаны уравнением $z = e^{hs} = e^{j\omega h}$. Используя билинейное преобразование

$$\omega = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{1 - e^{-j\omega h}}{1 + e^{-j\omega h}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega h}{2}$$

и заменяя комплексную переменную ω на jv , где v — фиктивная частота (псевдочастота), находим связь между псевдочастотой v и действительной частотой ω в виде $v = \operatorname{tg} \frac{\omega h}{2}$ или $\omega = \frac{2}{h} \operatorname{arctg} v$.

Для метода логарифмических амплитудно-фазовых характеристик необходимо, чтобы с изменением частоты комплексная переменная двигалась по мнимой оси комплексной плоскости. Поскольку с помощью билинейного преобразования $z = (1 + \omega) / (1 - \omega)$ внутренняя часть единичной окружности плоскости z отражается в левую половину плоскости ω , то метод логарифмических амплитудно-фазовых характеристик можно применять к комплексным передаточным функциям $K_p(jv)$. К комплексной передаточной функции $K_p(jv)$ получается из ω -передаточной функции $K_p(\omega)$ простой заменой комплексной переменной ω на jv . В свою очередь, ω -передаточная функция $K_p(\omega)$ получается из дискретной передаточной функции $K_p(z)$ путем подстановки в последнюю билинейного преобразования $z = (1 + \omega) / (1 - \omega)$.

Для определения ω -передаточных функций $K_p(\omega)$ системы на рис. 1.1, а в разомкнутом состоянии удобно вначале определять ω -передаточные функции регулятора $W(\omega)$ и объекта регулирования $HG(\omega)$, а затем находить ω -передаточную функцию системы как

$$K_p(\omega) = W(\omega) HG(\omega). \quad (2.84)$$

2.3. Типовые ω -передаточные функции цифровых регуляторов

№ п/п	Передаточная функция цифрового регулятора $\Psi(z)$	ω -передаточная функция цифрового регулятора $W(\omega)$
1	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$	$K_0 \frac{1 + b_1}{1 + a_1} \frac{1 + B_1 \omega}{1 + A_1 \omega},$ <p>где $B_1 = \frac{1 - b_1}{1 + b_1}$; $A_1 = \frac{1 - a_1}{1 + a_1}$</p>
2	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})}$	$K_0 \frac{1 + b_1 + b_2}{1 + a_1} \frac{1 + B_1 \omega + B_2 \omega^2}{2\omega(1 + A_1 \omega)},$ <p>где $B_1 = \frac{2(1 - b_2)}{1 + b_1 + b_2}$, $B_2 = \frac{1 - b_1 + b_2}{1 + b_1 + b_2}$, $A_1 = \frac{1 - a_1}{1 + a_1}$</p>
3	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$	$K_0 \frac{1 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \frac{1 + B_1 \omega + B_2 \omega^2}{1 + A_1 \omega + A_2 \omega^2},$ <p>где $B_1 = \frac{2(1 - b_2)}{1 + b_1 + b_2}$, $B_2 = \frac{1 - b_1 + b_2}{1 + b_1 + b_2}$, $A_1 = \frac{2(1 - a_2)}{1 + a_1 + a_2}$; $A_2 = \frac{1 - a_1 + a_2}{1 + a_1 + a_2}$</p>
4	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$	$K_0 \frac{1 + b_1 + b_2 + b_3}{1 + a_1 + a_2} \frac{1 + B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3}{2\omega(1 + A_1 \omega + A_2 \omega^2)},$ <p>где $B_1 = \frac{3 + b_1 - b_2 - 3b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3}$; $B_2 = \frac{3 - b_1 - b_2 + 3b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3}$;</p>

		$B_3 = \frac{1 - b_1 + b_2 - b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3}, \quad A_1 = \frac{2(1 - a_2)}{1 + a_1 + a_2}; \quad A_2 = \frac{1 - a_1 + a_3}{1 + a_1 + a_3}$
5	$K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$	$K_0 \frac{1 + b_1 + b_2 + b_3}{1 + a_1 + a_2 + a_3} \frac{1 + B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3}{1 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + A_3 \omega^3},$ <p>где $B_1 = \frac{3 + b_1 - b_2 - 3b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3}, \quad B_2 = \frac{3 - b_1 - b_2 + 3b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3};$ $B_3 = \frac{1 - b_1 + b_2 - b_3}{1 + b_1 + b_2 + b_3}, \quad A_1 = \frac{3 + a_1 - a_2 - 3a_3}{1 + a_1 + a_2 + a_3};$ $A_2 = \frac{3 - a_1 - a_2 + 3a_3}{1 + a_1 + a_2 + a_3}, \quad A_3 = \frac{1 - a_1 + a_2 - a_3}{1 + a_1 + a_2 + a_3}$</p>

2.4. ω -передаточные функции объектов регулирования (с учетом фиксатора нулевого порядка)

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	ω -передаточная функция объекта регулирования $IIG(\omega)$
1	$\frac{\alpha}{s^2}$	$\frac{\alpha h^2}{4} \frac{1 - \omega}{\omega^2}$
2	$\frac{\alpha}{s(s + b)}$	$\frac{\alpha h}{2b} \frac{(1 - \omega)(1 + K_1 \omega)}{\omega(1 + B_1 \omega)},$ <p>где $K_1 = B_1 - \frac{2}{bh}; \quad B_1 = \frac{1 + B}{1 - B}; \quad B = e^{-bh}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $\zeta(s)$	ω передаточная функция объекта регулирования $HG(\omega)$
3	$\frac{\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{\alpha}{ab} \frac{(1-i\omega)(1+K_1\omega)}{(1+A_1\omega)(1+B_1\omega)},$ <p>где $K_1 = \frac{aA_1 - bB_1}{a-b}$, $A_1 = \frac{1+A}{1-A}$, $B_1 = \frac{1+B}{1-B}$, $1 - e^{-aht}$, $B = e^{-bht}$</p>
4	$\frac{\alpha}{(s+a)^2}$	$\frac{\alpha}{a^2} \frac{(1-i\omega)(1-K_1\omega)}{(1+A_1\omega)^2},$ <p>где $K_1 = \frac{1-2ahA-A^2}{(1-A)^2}$, $A_1 = \frac{1+A}{1-A}$, $A = e^{-ah}$</p>
5	$\frac{\alpha}{s^2 + bs + a}$ <p>при $4a - b^2 > 0$</p>	$\frac{\alpha}{a} \frac{(1-i\omega) \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \omega \right)}{\left(1 + \frac{L_1}{K_2} \omega + \frac{L_2}{K_2} \omega^2 \right)},$ <p>где $K_1 = 1 - \frac{b}{\lambda} \sqrt{B} \sin \lambda h - B$, $K_2 = 1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B$, $L_1 = 2(1-B)$, $L_2 = 1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B$, $B = e^{-bh}$, $\lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}$,</p>
6	$\frac{\alpha}{s^2 + a^2}$	$\frac{\alpha}{a^2} \frac{1-i\omega}{1+L\omega^2},$

		где $L = \frac{1 + \cos ah}{1 - \cos ah}$
7	$\frac{\alpha}{s}$	$\frac{\alpha h^3 (1 - \omega)}{8} \frac{\left(1 - \frac{1}{3} \omega^2\right)}{\omega^3}$
8	$\frac{\alpha}{s^2 (s + b)}$	$\frac{\alpha h^2 (1 - \omega) (1 + K_1 \omega + K_2 \omega^2)}{4b} \frac{1}{\omega^2 (1 + B_1 \omega)},$ <p>где $K_1 = B_1 - \frac{2}{bh}$, $B_1 = \frac{1 + B}{1 - B}$, $K_2 = \frac{4 - 2bhB_1}{b^2 h^2}$, $B = e^{-bh}$</p>
9	$\frac{\alpha}{s (s + a) (s + b)}$	$\frac{\alpha h (1 - \omega) (1 + K_1 \omega + K_2 \omega^2)}{2ab} \frac{1}{a (1 + A_1 \omega) (1 + B_1 \omega)},$ <p>где $K_1 = A_1 + B_1 - \frac{2(a + b)}{abh}$, $K_2 = A_1 B_1 + \frac{2b^2 B_1 - 2a - A_1}{abh (a - b)}$, $A_1 = \frac{1 + A}{1 - A}$, $B_1 = \frac{1 + B}{1 - B}$, $A = e^{-ah}$, $B = e^{-bh}$</p>
10	$\frac{\alpha}{s (s + a)^2}$	$\frac{\alpha h (1 - \omega) (1 + K_1 \omega + K_2 \omega^2)}{2a^2} \frac{1}{\omega (1 + A_1 \omega)^2},$ <p>где $K_1 = 2A_1 - \frac{4}{ah}$, $K_2 = A_1^2 + \frac{4A}{(1 - A)^2} - \frac{4A_1}{ah}$, $A_1 = \frac{1 + A}{1 - A}$, $A = e^{-ah}$</p>

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	ω передаточная функция объекта регулирования $HG(\omega)$
11	$\frac{\alpha}{s(s^2 + bs + a)}$ <p data-bbox="207 1215 233 1464">при $4a - b^2 > 0$</p>	$\frac{\alpha h}{2a} \frac{(1 - \omega)(1 + K_1 \omega + K_2 \omega^2)}{\omega(1 + L_1 \omega + L_2 \omega^2)},$ $2b \left(1 - B - \sqrt{B} \frac{b^2 - 2a}{b\lambda} \sin \lambda h \right);$ <p data-bbox="233 274 259 1464">где $K_1 = L_1 - \frac{2b}{ah}$, $K_2 = L_2 - \frac{2b}{ah} (1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)$;</p> $L_1 = \frac{2(1 - B)}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}, \quad L_2 = \frac{1 + 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}{1 - 2\sqrt{B} \cos \lambda h + B},$ $B = e^{-bh}, \quad \lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}$
12	$\frac{\alpha}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{\alpha h}{2a^2} \frac{(1 - \omega)(1 + K\omega^2)}{\omega(1 + L\omega^2)},$ <p data-bbox="259 274 284 1464">где $K = L - \frac{2 \sin ah}{ah(1 - \cos ah)}$; $L = \frac{1 + \cos ah}{1 - \cos ah}$</p>
13	$\frac{\alpha}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{\alpha}{abc} \frac{(1 - \omega)(1 + K_1 \omega + K_2 \omega^2)}{(1 + A_1 \omega)(1 + B_1 \omega)(1 + C_1 \omega)},$ <p data-bbox="310 274 336 1464">где $A = e^{-ah}$, $B = e^{-bh}$, $C = e^{-ch}$, $A_1 = \frac{1 + A}{1 - A}$, $B_1 = \frac{1 + B}{1 - B}$, $C_1 = \frac{1 + C}{1 - C}$;</p>

$$K_1 = \frac{ab(A_1 + B_1)}{(a-c)(b-c)} + \frac{ac(A_1 + C_1)}{(a-b)(c-b)} + \frac{bc(B_1 + C_1)}{(a-b)(a-c)}; \quad K_2 = \frac{abA_1B_1}{(a-c)(b-c)} + \frac{acA_1C_1}{(a-b)(c-b)} + \frac{bcB_1C_1}{(a-b)(a-c)}$$

$$\frac{\alpha}{(s+b)(s+a)^2}$$

14

$$\frac{\alpha}{a^2} \frac{(1-\omega)(1+K_1\omega + K_2\omega^2)}{(1+A_1\omega)^2(1+B_1\omega)},$$

где $A = e^{-ah}$, $B = e^{-bh}$; $A_1 = \frac{1+A}{1-A}$; $B_1 = \frac{1+B}{1-B}$, $K_1 = \frac{b(b-2a)}{(a-b)^2}(A_1 + B_1) +$
 $+ 2 \frac{a^2A_1}{(a-b)^2} + 2 \frac{abhA}{(a-b)(1-A)^2}$; $K_2 = \frac{b(b-2a)A_1B_1}{(a-b)^2} + \frac{a^2A_1^2}{(a-b)^2} +$
 $+ 2 \frac{abhB_1A}{(a-b)(1-A)^2}$

$$\frac{\alpha}{(s+c)(s^2+bs+a)}$$

при $4a-b^2 > 0$

15

$$\frac{\alpha}{ac} \frac{(1-\omega)(1+K_1\omega + K_2\omega^2)}{(1+C_1\omega)(1+L_1\omega + L_2\omega^2)},$$

где $C = e^{-ch}$, $B = e^{-bh}$; $C_1 = \frac{1+C}{1-C}$, $L_1 = 2 \frac{1-B}{1-2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}$;

$$\lambda = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}, \quad \lambda' = \frac{1+2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}{1-2\sqrt{B} \cos \lambda h + B}; \quad K_1 = \frac{aL_1}{a-bc+c^2} -$$

$$- \frac{2c(b-c)[1+BC-(1+C)\sqrt{B} \cos \lambda h]}{(1-C)(1-2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(a-bc+c^2)} + \frac{c(b^2-bc-2a)\sqrt{B} \sin \lambda h}{(1-\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(a-bc+c^2)},$$

$$K_2 = \frac{aL_2}{a-bc+c^2} - L_1C_1 \frac{c(b-c)}{2(a-bc+c^2)} + C_1 \frac{c(b^2-bc-2a)\sqrt{B} \sin \lambda h}{\lambda(1-2\sqrt{B} \cos \lambda h + B)(a-bc+c^2)}$$

№ п/п	Передаточная функция объекта регулирования $G(s)$	ω-передаточная функция объекта регулирования $HG(\omega)$
16	$\frac{\alpha}{(s+b)(s^2+a^2)}$	$\frac{\alpha(1-\omega)(1+K_1\omega+K_2\omega^2)}{a^2b(1+B_1\omega)(1+L\omega^2)},$ <p>где $L = \frac{1+\cos ah}{1-\cos ah}$, $B = e^{-bh}$, $B_1 = \frac{1+B}{1-B}$, $K_1 = \frac{b^2B_1}{a^2+b^2}$, $K_2 = \frac{ab \sin ah}{(1-\cos ah)(a^2+b^2)}$,</p> $K_2 = \frac{a^2L}{a^2+b^2} - \frac{abB_1 \sin ah}{(1-\cos ah)(a^2+b^2)}$
17	$\frac{\alpha}{(s+a)^3}$	$\frac{\alpha(1-\omega)(1+K_1\omega+K_2\omega^2)}{a^3(1+A_1\omega)^3},$ <p>где $A = e^{-ah}$, $A_1 = \frac{1+A}{1-A}$; $K_1 = 2 \frac{1-ahA-A^2}{(1-A)^2} - A_1 \frac{a^2h^2A}{(1-A)^2}$;</p> $K_2 = A_1 \frac{1-2ahA-A^2}{(1-A)^2} - \frac{a^2h^2A}{(1-A)^3}$

Для рассматриваемой системы используя подстановку $z = (1 + w) / (1 - w)$ и выражения (2 82) и (2 83), определяем

$$W(w) = K_0 \frac{1 + b_1}{1 + a_1} \frac{1 + B_1 w}{1 + A_1 w}, \quad (2 85)$$

где

$$A_1 = \frac{1 - a_1}{1 + a_1}; \quad B_1 = \frac{1 - b_1}{1 + b_1} = \frac{1 + B}{1 - B}; \quad B = e^{-bh}.$$

$$HG(w) = \frac{\alpha h}{2b} \frac{(1 - w) \left[1 + \left(B_1 - \frac{2}{bh} \right) w \right]}{w (1 + A_1 w)}. \quad (2.86)$$

Типовые w передаточные функции цифровых регуляторов представлены в табл 2 3 а w передаточные функции объектов регулирования (с учетом фиксатора нулевого порядка на входе объекта) — в табл. 2 4

Если для объекта регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha[s(s + b)]^{-1}$, параметры передаточной функции (2 82) цифрового регулятора рассчитаны точно, то w передаточную функцию системы на рис 1 1 а в разомкнутом состоянии можно определить по формулам (2 84)—(2 86)

$$K_p(w) = K_0 \frac{1 + b_1}{1 + a_1} \frac{\alpha h}{2b} \frac{(1 - w) \left[1 + \left(B_1 - \frac{2}{bh} \right) w \right]}{w (1 + A_1 w)}.$$

Комплексная передаточная функция разомкнутой системы

$$K_p(jv) = K_0 \frac{1 + b_1}{1 + a_1} \frac{\alpha h}{2b} \frac{(1 - jv) \left[1 + \left(B_1 - \frac{2}{bh} \right) jv \right]}{jv (1 + A_1 jv)}. \quad (2.87)$$

По функциям $K_p(w)|_{w=jv} = K_p(jv)$ можно строить логарифмические частотные характеристики, т е зависимости амплитуды (в децибелах) и фазы (в градусах) от псевдочастоты. Непосредственно по этим кривым можно определять запасы по модулю и по фазе характеризующие степень устойчивости системы, а перенося амплитудную и фазовую характеристики на обычную диаграмму замыкания, можно определять резонансный пик, резонансную частоту, полосу пропускания и оценивать динамические свойства замкнутой системы [33 38]

При изменении псевдочастоты v от 0 до ∞ действительная частота ω увеличивается от 0 до $\omega_h/2 = \pi/h$. Перепишем функцию $K_p(jv)$ в виде

$$K_p(jv) = |K_p(jv)| \exp \{j\varphi_p(v)\} = B(v) + jM(v), \quad (2.88)$$

где

$$\begin{aligned} |K_p(jv)| &= \sqrt{B^2(v) + M^2(v)}, \\ \varphi_p(v) &= \arctg [M(v)/B(v)], \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\left. \begin{aligned} B(v) &= -K_0 \frac{1+b_1}{1+a_1} \frac{\alpha h}{2b} \frac{1+A_1 - \left(B_1 - \frac{2}{bh}\right)(1-A_1v^2)}{1+A_1^2v^2}; \\ M(v) &= -K_0 \frac{1+b_1}{1+a_1} \frac{\alpha h}{2b} \frac{1-A_1v^2 + \left(B_1 - \frac{2}{bh}\right)(1+A_1)v^2}{v(1+A_1^2v^2)} \end{aligned} \right\} (2.90)$$

Предположим, что параметры передаточной функции $W(\omega)$ регулятора остались прежними, а параметры передаточной функции объекта изменились, и математическая модель объекта описывается передаточной функцией $G(s) = \hat{\alpha} [s(s + \hat{b})]^{-1}$. Тогда w передаточная функция объекта регулирования имеет вид

$$HG(\omega) = \frac{\hat{\alpha}h}{2b} \frac{(1-\omega) \left[1 + \left(\hat{B}_1 - \frac{2}{bh} \right) \omega \right]}{\omega(1 + \hat{B}_1\omega)},$$

где $\hat{B}_1 = \frac{1 + \hat{B}}{1 - \hat{B}}$, $\hat{B} = e^{-bh}$.

В этом случае комплексная передаточная функция разомкнутой системы

$$K_p(j\nu) = K_0 \frac{1+b_1}{1+a_1} \frac{1+B_1j\nu}{1+A_1j\nu} \left\{ \frac{\hat{\alpha}h}{2b} \frac{(1-j\nu) \left[1 + \left(\hat{B}_1 - \frac{2}{bh} \right) j\nu \right]}{j\nu(1 + \hat{B}_1j\nu)} \right\}. \quad (2.91)$$

Эту комплексную передаточную функцию можно представить также формулами (2.88) и (2.89), в которых

$$\left. \begin{aligned} B(v) &= \frac{K_0h}{2} \frac{1+b_1}{1+a_1} \frac{(1+A_1B_1v^2)B_0(v) + v(A_1-B_1)M_0(v)}{1+A_1^2v^2}; \\ M(v) &= \frac{K_0h}{2} \frac{1+b_1}{1+a_1} \frac{(1+A_1B_1v^2)M_0(v) - v(A_1-B_1)B_0(v)}{1+A_1^2v^2}; \end{aligned} \right\} (2.92)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0(v) &= -\frac{\hat{\alpha}}{b} \frac{1 + \hat{B}_1 - \left(\hat{B}_1 - \frac{2}{bh} \right) (1 - \hat{B}_1v^2)}{1 + \hat{B}_1^2v^2}; \\ M_0(v) &= \frac{\hat{\alpha}}{b} \frac{1 - \hat{B}_1v^2 + \left(\hat{B}_1 - \frac{2}{bh} \right) (1 + \hat{B}_1)v^2}{v(1 + \hat{B}_1^2v^2)}. \end{aligned} \right\} (2.93)$$

Таким образом, комплексную передаточную функцию в разомкнутом состоянии $K_p(j\nu)$ рассматриваемой системы на рис. 11, а можно определить по формулам (2.87)–(2.90), когда параметры оптимального цифрового регулятора точно соответствуют параметрам объекта регулирования, и по формулам (2.88)

(2 89), (2 91)—(2 93), когда параметры цифрового регулятора не соответствуют параметрам объекта регулирования

В качестве примера рассмотрим систему на рис 1 1, а, в которой шаг квантования $h = 0,1$ с и объект регулирования имеет передаточную функцию $G(s) = \alpha |s(s+b)|^{-1}$ с расчетными параметрами $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$ Оптимальный для ступенчатых воздействий цифровой регулятор при таких параметрах объекта имеет передаточную функцию

$$W(z) = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = 11,0333 \frac{1 - 0,8187z^{-1}}{1 + 0,4833z^{-1}}$$

Рассчитанные по формулам (2 88)—(2 90) логарифмическая амплитудно частотная $|K_p(j\nu)|$ и фазочастотная $\varphi_p(\nu)$ характеристики показаны на рис 2 36, кривые 1 По этим характеристикам находим псевдочастоту среза $\nu_0 = 0,356$, запас устойчивости по фазе на этой частоте $\gamma = 64^\circ$, запас устойчивости по

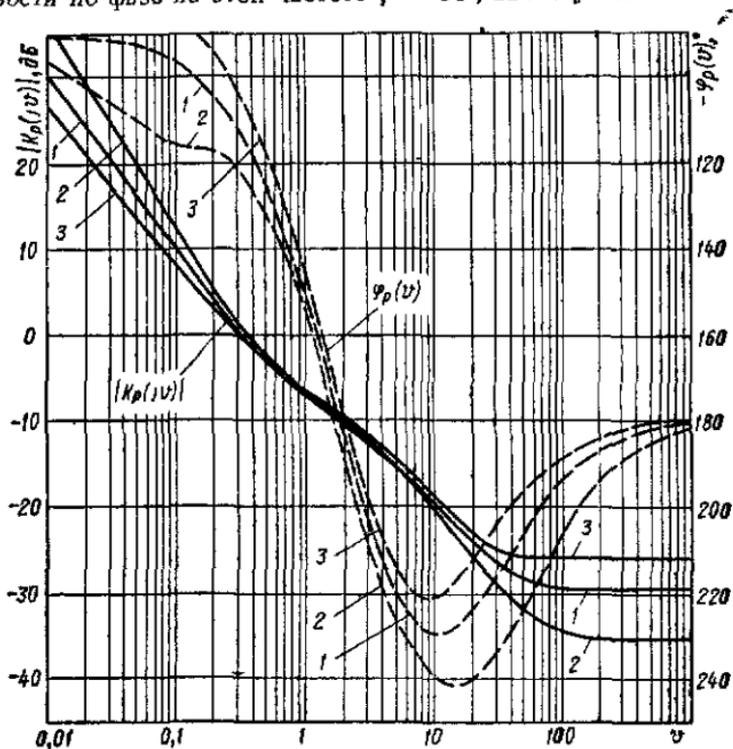


Рис 2 36

амплитуде 9,74 дБ (на псевдочастоте перехода фазовой характеристики через -180°)

Изменим частоту сопряжения в объекте, например $\hat{b} = 1$, оставив без изменения все остальные параметры системы Рассчитанные по формулам (2 89), (2 92), (2 93) характеристики $|K_p(j\nu)|$ и $\varphi_p(\nu)$ показаны на рис 2 36, кривые 2 По этим характеристикам находим псевдочастоту среза $\nu_c = 0,368$, запас

устойчивости по фазе $\gamma = 55,42^\circ$, запас устойчивости по амплитуде 9,41 дБ

Изменим частоту сопряжения в объекте, например $\hat{b} = 3$, оставив без изменения все остальные параметры системы. Рассчитанные по формулам (2 89), (2 92), (2 93) характеристики $|K_p(\nu)|$ и $\varphi_p(\nu)$ показаны на рис 2 36, кривые 3. По этим характеристикам находим псевдочастоту среза $\nu_c = 0,336$, запас устойчивости по фазе $\gamma = 73,09^\circ$, запас устойчивости по амплитуде 10,09 дБ.

Таким образом, изменение частоты сопряжения \hat{b} (постоянной времени $T_1 = \hat{b}^{-1}$, с) на $\pm 50\%$ приводит к изменению псевдочас-

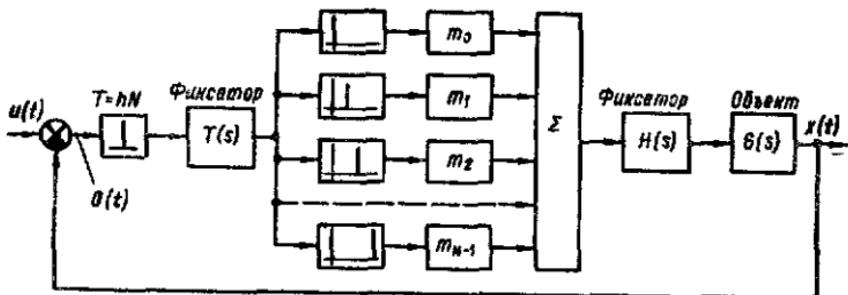


Рис 2 37

тоты среза примерно на $\begin{matrix} +3,4 \\ -5,6 \end{matrix} \%$, запаса устойчивости по фазе на $\begin{matrix} +14,2 \\ -13,4 \end{matrix} \%$, запаса устойчивости по амплитуде на $\begin{matrix} +3,6 \\ -3,4 \end{matrix} \%$.

Более сложной задачей является получение частотных характеристик системы управления, структурная схема которой показана на рис 2 1, б. Для анализа в частотной области эту структурную схему удобно представить в виде эквивалентной схемы синхронной импульсной системы (рис 2 37) в которой вместо мгновенного ключа с шагом квантования h и цифрового регулятора с передаточной функцией $M^*(z)$ имеются N параллельно включенных мгновенных ключей с шагом квантования $T = Nh$, которые замыкаются с задержкой на νh , $\nu = 0, 1, \dots, N - 1$, относительно основного мгновенного ключа и подключены к соответствующим усилителям с коэффициентами передачи m_ν . Выходы всех усилителей соединены с сумматором Σ . Если полином $M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + \dots + m_{N-1} z^{-N+1}$ в числителе передаточной функции $M^*(z)$ цифрового регулятора в системе на рис 2 1, б представляет собой z -изображение оптимального при единичном ступенчатом воздействии на входе системы управляющего воздействия на входе объекта регулирования, то коэффициенты m_ν равны амплитудам этого управляющего воздействия. Коэффициенты m_ν можно также выбирать из других соображений, например, на основе критерия минимума среднеквадратической ошибки системы при случайном входном воздействии.

Для определения дискретной передаточной функции системы на рис 2 37 в разомкнутом состоянии необходимо найти передаточные функции фиксаторов с конечной длительностью импульса

h и запаздыванием νh и соответствующих усилителей:

$$H_{\nu}(s) = m_{\nu} \int_{\nu h}^{(\nu+1)h} e^{-st} dt = m_{\nu} \frac{(1 - e^{-hs}) e^{-\nu hs}}{s}.$$

Затем определить передаточную функцию

$$K_p(s) = \sum_{\nu=0}^{N-1} H_{\nu}(s) G(s).$$

Тогда дискретную передаточную функцию $K_p(z)$ можно записать в виде

$$K_p(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} m_{\nu} \left[Z_{\sigma_{\nu}} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} - Z_{\sigma_{\nu+1}} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right],$$

где $\sigma_{\nu} = 1 - \nu h/T$, $\sigma_{\nu+1} = 1 - (\nu+1)h/T$; $z = e^{Ts}$; Z_{σ} — модифицированное z -преобразование [38]. При $\nu = 0$ $Z_{\sigma_0} \{ \} = Z \{ \}$.

Рассмотрим систему на рис. 2.37 с объектом регулирования, имеющим передаточную функцию $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ и регулятором, формирующим на входе объекта регулирования два импульса длительностью h , первый из которых имеет амплитуду m_0 , второй, следующий за первым, амплитуду m_1 . Передаточная функция $K_p(s)$ в этом случае

$$K_p(s) = m_0 \frac{1 - e^{-hs}}{s} G(s) + m_1 \frac{e^{-hs} - e^{-2hs}}{s} G(s).$$

Дискретная передаточная функция

$$K_p(z) = m_0 \frac{\alpha}{b} \left[Z \left\{ \frac{b}{s^2(s+b)} \right\} - Z_{\sigma_1} \left\{ \frac{b}{s^2(s+b)} \right\} \right] + \\ + m_1 \frac{\alpha}{b} \left[Z_{\sigma_1} \left\{ \frac{b}{s^2(s+b)} \right\} - Z_{\sigma_2} \left\{ \frac{b}{s^2(s+b)} \right\} \right],$$

где $\sigma_1 = 1 - h/T$, $\sigma_2 = 1 - 2h/T$, $T = 2h$;

$$Z_{\sigma} \left\{ \frac{b}{s^2(s+b)} \right\} = \frac{T}{(z-1)^2} + \frac{\sigma T - \frac{1}{b}}{z-1} - \frac{e^{-\sigma b T}}{b(z - e^{-bT})}.$$

После вычислений находим

$$K_p(z) = m_0 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{z-1} - \frac{1}{b} + \frac{z - e^{-bh}}{b(z - e^{-2bh})} \right] + \\ + m_1 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{z-1} - \frac{1 - e^{-bh}}{b(z - e^{-2bh})} \right].$$

Используя билинейное преобразование $z = (1 + w)/(1 - w)$, определяем w -передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии

$$K_p(w) = m_0 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h(1-w)}{2w} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b(1+B)} \frac{1+B_1w}{1+A_1w} \right] + m_1 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h(1-w)}{2w} - \frac{1}{b(1+B)} \frac{1-w}{1+A_1w} \right], \quad (2.94)$$

$$\text{где } B = e^{-bh}; \quad B_1 = \frac{1+B}{1-B}; \quad A_1 = \frac{1+B^2}{1-B^2}.$$

Заменяя комплексную переменную w на jv , получаем комплексную передаточную функцию $K_p(jv)$, которую представим в виде выражений (2.88) и (2.89), где

$$V(v) = -m_0 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{2} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b(1+B)} \frac{1+A_1B_1v^2}{1+A_1v^2} \right] - m_1 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{2} + \frac{1}{b(1+B)} \frac{1-A_1v^2}{1+A_1v^2} \right]; \quad (2.95)$$

$$M(v) = -m_0 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{2v} + \frac{1}{b(1+B)} \frac{(A_1-B_1)v}{1+A_1v^2} \right] - m_1 \frac{\alpha}{b} \left[\frac{h}{2v} - \frac{1}{b(1+B)} \frac{(1+A_1)v}{1+A_1v^2} \right]. \quad (2.96)$$

В качестве примера рассмотрим систему на рис. 2.37, в которой шаг регулирования $T = Nh = 2 \cdot 0,1 = 0,2$ с и объект регулирования имеет передаточную функцию $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ с расчетными параметрами $\alpha = 10 \text{ с}^{-2}$, $b = 2 \text{ с}^{-1}$. Оптимальные коэффициенты (амплитуды управляющих воздействий на входе объекта регулирования) при ступенчатом воздействии на входе системы и указанных параметрах

$$m_0 = \frac{b}{\alpha h(1-B)} = 11,0333; \quad m_1 = -Bm_0 = -9,0333.$$

Расчитанные по формулам (2.89), (2.95) и (2.96) логарифмическая амплитудно-частотная $|K_p(jv)|$ и фазочастотная $\varphi_p(v)$ характеристики построены на рис. 2.38, кривые 1. По этим характеристикам находим: псевдочастоту среза $v_0 = 0,577$, запас устойчивости по фазе на этой частоте $\gamma = 60^\circ$, запас устойчивости по амплитуде 6,02 дБ.

Изменим частоту сопряжения в объекте, например $\hat{b} = 1$, оставив без изменения все остальные параметры системы. Расчитанные по формулам (2.89), (2.95), (2.96) характеристики $|K_p(jv)|$ и $\varphi_p(v)$ показаны на рис. 2.38, кривые 2. По этим характеристикам находим: псевдочастоту среза $v_c = 0,612$, запас устойчивости по фазе $\gamma = 49,85^\circ$, запас устойчивости по амплитуде 5,97 дБ.

Изменим частоту сопряжения в объекте, например $\hat{b} = 3$, оставив без изменения все остальные параметры системы. Расчитанные по формулам (2.89), (2.95) и (2.96) характеристики $|K_p(jv)|$ и $\varphi_p(v)$ показаны на рис. 2.38, кривые 3. По этим харак-

теристикам находим: псевдочастоту среза $\nu_0 = 0,518$, запас устойчивости по фазе $\gamma = 71,14^\circ$, запас устойчивости по амплитуде 6,14 дБ.

Таким образом, изменение частоты сопряжения b (постоянной времени $T_1 = b^{-1}$) на $\pm 50\%$ приводит к изменению псевдочастоты среза примерно на $\begin{matrix} +6,59 \\ -10,23 \end{matrix}\%$, запаса устойчивости по фазе на $\begin{matrix} +18,57 \\ -16,92 \end{matrix}\%$, запаса устойчивости по амплитуде на $\begin{matrix} +1,99 \\ -0,81 \end{matrix}\%$.

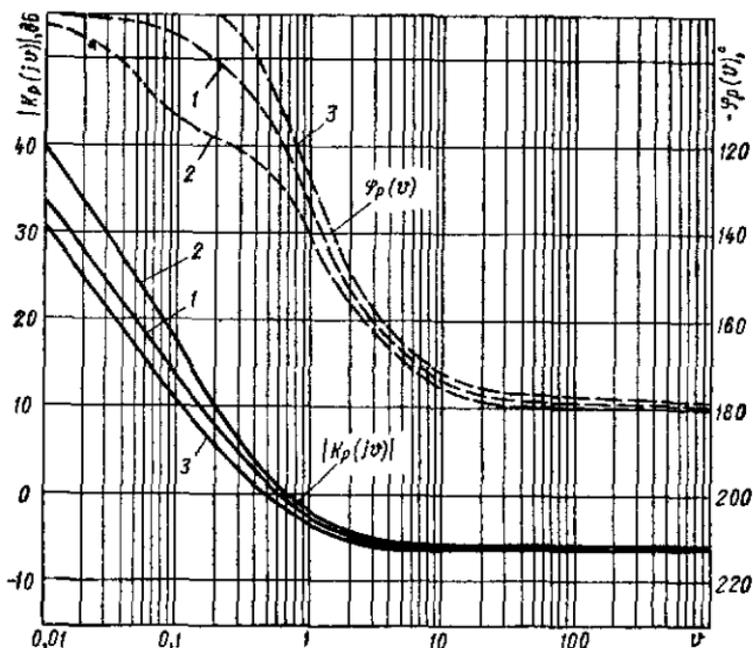


Рис. 2.38

Следует иметь в виду, что при изменении частоты сопряжения b в передаточной функции объекта регулирования $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$ изменяется реальный коэффициент усиления объекта $K_0 = \alpha/b$, а значит, и коэффициент усиления разомкнутого контура системы, что хорошо видно из графиков рис. 2.36 и 2.38. При произвольном (случайном) воздействии на входе систем управления определяют статистические характеристики воздействия (например, корреляционную функцию, спектральную плотность) и для этих характеристик находят такие параметры регулятора, при которых среднеквадратическая ошибка в системе минимальна.

Пусть корреляционная функция дискретного процесса на входе системы управления (рис. 2.37) имеет вид [13]

$$R(nT) = D e^{-\mu |nT|} \cos \Omega nT, \quad (2.97)$$

где D — дисперсия входного воздействия; Ω — преобладающая частота в спектре входного воздействия; μ — коэффициент нерегулярности.

Корреляционной функции соответствует спектральная плотность в функции абсолютной псевдочастоты $\nu_0 = \frac{2}{T} \lg \frac{\omega T}{2}$

$$S(\nu_0) = \frac{DS_1 \left(1 + \frac{\nu_0^2 T^2}{4}\right) \left(S_2 + \frac{\nu_0^2 T^2}{4}\right)}{4S_1^2 \frac{\nu_0^2 T^2}{4} + \left(S_2 - \frac{\nu_0^2 T^2}{4}\right)^2}, \quad (2.98)$$

где $S_1 = \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} \operatorname{ch} \frac{\mu T}{2}}{1 + \operatorname{sh} \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\Omega T}{2}}$; $S_2 = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} + \sin^2 \frac{\Omega T}{2}}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\mu T}{2} - \sin^2 \frac{\Omega T}{2}}$.

Использование абсолютной псевдочастоты $\nu_0 = \frac{2}{T} \sigma$ (при этом $\omega = j \frac{T}{2} \nu_0$) вместо псевдочастоты σ удобно вследствие того, что на малых частотах ω ($\omega < 2/T$) абсолютная псевдочастота практически совпадает с обычной, т. е. $\nu_0 \approx \omega$, и частотные характеристики системы, построенные в функции псевдочастоты, практически совпадают с частотными характеристиками, построенными в функции обычной круговой частоты ω .

Дисперсию ошибки в системе управления с передаточной функцией $K_p(j\nu_0)$ при случайном дискретном входном воздействии и помехе в виде дискретного белого шума с дисперсией D_0 можно найти по формуле [13]

$$D_1 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + K_p(j\nu_0)} \right|^2 \frac{S(\nu_0) d\nu_0}{1 + \frac{\nu_0^2 T^2}{4}} + \frac{T D_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_p(j\nu_0)}{1 + K_p(j\nu_0)} \right|^2 \frac{d\nu_0}{1 + \frac{\nu_0^2 T^2}{4}}. \quad (2.99)$$

Среднеквадратическая ошибка $\bar{\Theta} = \sqrt{D_1}$.

Пусть ω -передаточная функция системы (рис. 2.37) в разомкнутом состоянии определяется выражением (2.94). Заменяя комплексную переменную ω на $j\nu$, получаем комплексную передаточную функцию $K_p(j\nu)$

$$K_p(j\nu) = \frac{\alpha h}{2b} \frac{(1 - j\nu) \left\{ m_0 + m_1 + j\nu \left[A_1 (m_0 + m_1) - \frac{2(m_0 B + m_1)}{bh(1+B)} \right] \right\}}{j\nu (1 + j\nu A_1)}. \quad (2.100)$$

Используя выражение (2.100) и переходя к абсолютной псевдо-частоте $v_0 \left(v = \frac{T}{2} v_0 \right)$, определяем комплексную передаточную функцию системы в замкнутом состоянии и комплексную передаточную функцию системы по ошибке соответственно

$$K_p(jv_0) = \frac{K_p(jv_0)}{1 + K_p(jv_0)} = \frac{C_0 + jv_0 \frac{T}{2} C_1 + (jv_0)^2 \frac{T^2}{4} C_2}{C_0 + jv_0 \frac{T}{2} L_1 + (jv_0)^2 \frac{T^2}{4} L_2}; \quad (2.101)$$

$$K_\Theta(jv_0) = \frac{1}{1 + K_p(jv_0)} = \frac{jv_0 \left(bT + jv_0 bA_1 \frac{T^2}{2} \right)}{C_0 + jv_0 \frac{T}{2} L_1 + (jv_0)^2 \frac{T^2}{4} L_2}, \quad (2.102)$$

где $C_0 = \alpha h (m_0 + m_1)$; $C_1 = \frac{2B^2 C_0}{1 - B^2} - L_0$; $C_2 = L_0 - C_0 A_1$; $L_1 = 2b + C_1$; $L_2 = A_1 (2b - C_0) + L_0$; $L_0 = \frac{2\alpha (m_0 B + m_1)}{b(1 + B)}$.

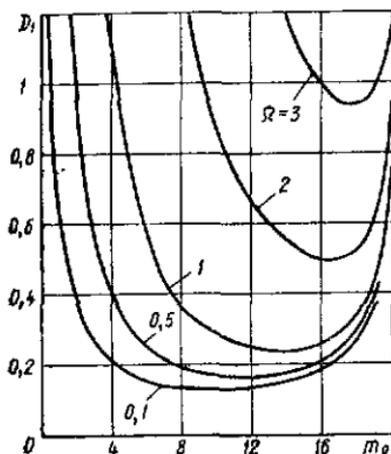


Рис. 2.39

2.5. Минимальные дисперсии ошибки при различных частотах Ω

Ω	m_0	m_1	D_1
0,1	10,639	-8,710	0,131
0,5	11,926	-9,764	0,160
1,0	14,621	-11,971	0,234
2,0	17,133	-14,028	0,496
3,0	18,711	-15,319	0,936

Подставляя выражения (2.101), (2.102) в формулу (2.99) и приводя интегралы в формуле (2.99) к табличным

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(jv_0) dv_0}{|G(jv_0)|^2}, \quad (2.103)$$

где $H(jv_0) = b_0 (jv_0)^{2n-2} + b_1 (jv_0)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$;
 $G(jv_0) = a_0 (jv_0)^n + a_1 (jv_0)^{n-1} + \dots + a_n$.

определяем дисперсию ошибки D_1 при заданных характеристиках входного воздействия и параметрах системы управления.

На рис. 2.39 построены рассчитанные по формулам (2.97)–(2.103) зависимости дисперсии ошибки D_1 от коэффициента m_0 .

дискретного регулятора (при условии, что $m_1 = -Vm_0$), характеристиках входного воздействия $D_0 = 0,01$; $D = 3$, $\mu = 0,1$, передаточной функции объекта регулирования $G(s) = 10 [s(s+2)]^{-1}$, интервале дискретности $T = 0,2$ с и различных преобладающих частотах Ω в спектре входного воздействия. Для указанных на рисунке частот Ω минимальные дисперсии ошибки D_1 и соответствующие этим дисперсиям коэффициенты m_0 и m_1 приведены в табл. 2.5.

2.5. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА МИКРО-ЭВМ

Для повышения качества и интенсификации проектирования систем управления, сокращения сроков и стоимости следует использовать средства вычислительной техники, разрабатывать новые ориентированные на ЭВМ методы и алгоритмы, предназначенные для моделирования и автоматизации проектирования современных САУ.

Среди различных методов моделирования САУ можно выделить два, основанных на использовании математических моделей САУ в виде моделей состояния и структурных моделей. Однако моделирование САУ, представленных в виде моделей состояния, требует значительных объемов памяти и высокого быстродействия ЭВМ, что не позволяет реализовать этот способ на микро-ЭВМ.

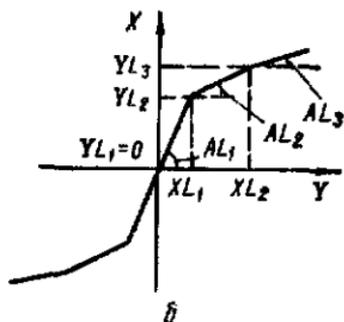
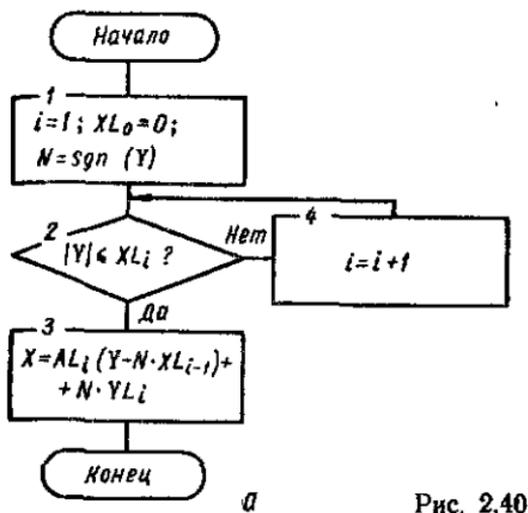
Широко применяют структурно-топологические методы, позволяющие максимально использовать информацию о структуре исследуемой системы, где каждому типовому звену соответствует определенная модель. В основу алгоритма структурного моделирования типовых звеньев САУ положено использование единой модели универсального динамического звена. Задание конкретных значений параметров моделей универсального динамического звена, можно получить различные типовые звенья. Поскольку при этом изменяются только исходные величины, то достигается высокая универсальность метода. При этом только задание структуры исследуемой системы является нестандартным. Для этого все звенья системы нумеруют. Каждое звено имеет входной y_i и выходной x_i сигналы ($i = 1, 2, \dots, N$, где N — количество типовых звеньев в системе).

В состав модулей универсального динамического звена должны входить модели типовых линейных и нелинейных динамических звеньев. Конкретный набор моделей определяет пользователь в зависимости от решаемых задач. В табл. 1.3 записаны рекуррентные формулы, которые позволяют определять выход типовых линейных динамических звеньев как функцию их входа на данном шаге интегрирования, а также входа и выхода на предыдущем шаге интегрирования. При моделировании динамики САУ необходимо учитывать различные нелинейности. Рассмотрим алгоритмы моделирования некоторых типовых нелинейностей.

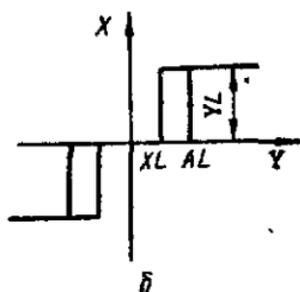
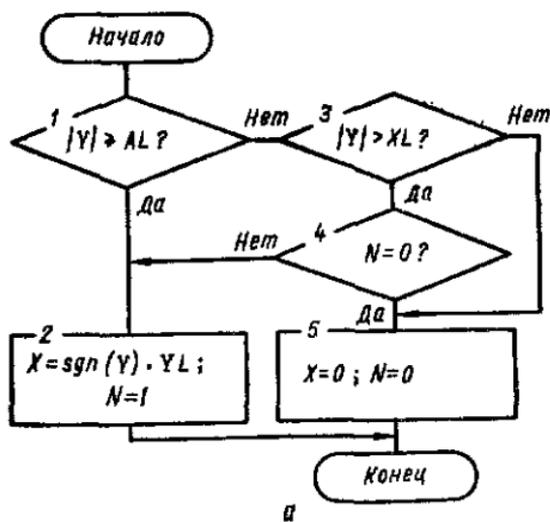
Схема алгоритма моделирования нелинейности типа «ломаная» и ее характеристика изображены на рис. 2.40, где XL_i , YL_i , AL_i — абсцисса конца, ордината начала и коэффициент наклона i -го участка соответственно. Данный алгоритм позволяет моделировать нелинейности типа «ломаная» с центрально-симметричным расположением участков относительно начала координат. Смещенные характеристики относительно начала

координат легко реализуется путем соответственного смещения входной и выходной величин и выполняется в управляющей программе, определяющей структуру моделируемой системы.

Схема алгоритма моделирования нелинейности типа «реле с гистерезисом» и ее характеристика изображены на рис. 2.41,



а Рис. 2.40



а Рис. 2.41

где AL , XL , YL — абсциссы включения и выключения реле и ордината выхода соответственно; N — идентификатор, характеризующий состояние реле в предыдущий момент времени ($N = 0$ — реле выключено; $N = 1$ — реле включено).

Схема алгоритма моделирования нелинейности типа «гистерезис» и ее характеристика изображены на рис. 2.42, где XL , YL , AL — абсциссы нуля функции, перехода в насыщение, ордината насыщения соответственно; N — идентификатор ($N = 0$ — исходное (размагниченное) состояние; $N = 1$ — при уве-

личении входного сигнала, $N = -1$ — при уменьшении); $Y1$ и $X1$ — значения входа и выхода в предыдущий момент времени.

Схема алгоритма моделирования нелинейности типа «слюфт» и ее характеристика изображены на рис. 2.43, где AL и XL —

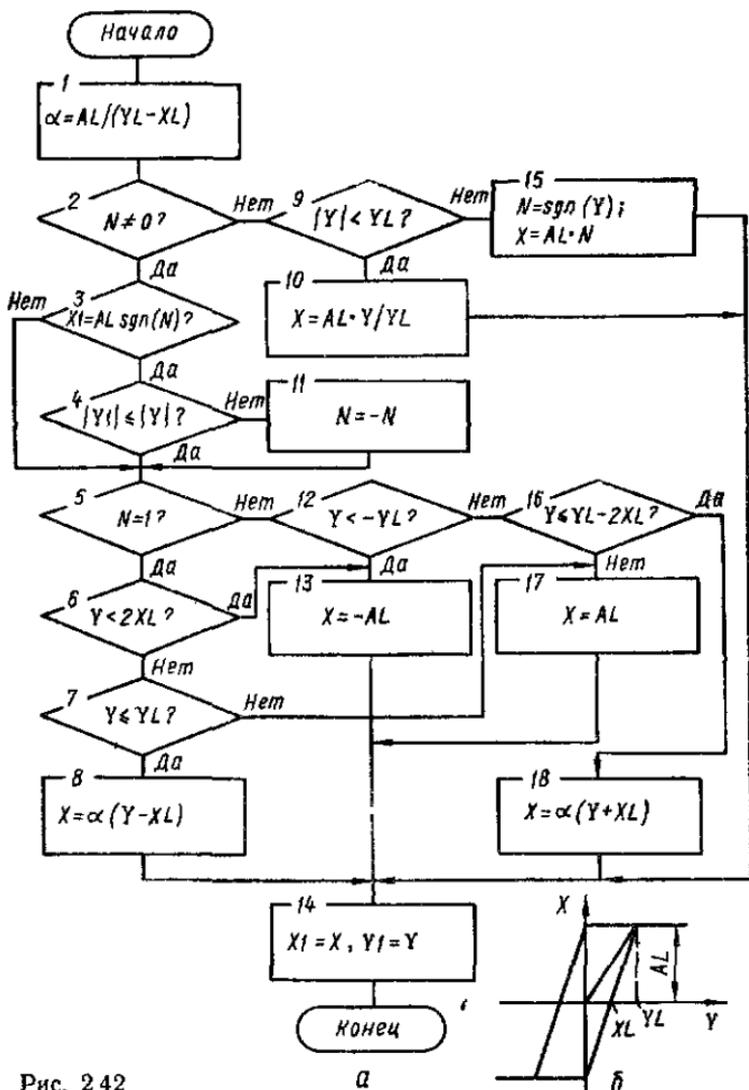


Рис. 2.42

абсцисса нуля функции и коэффициент наклона; $Y1$ и $X1$ — значения входа и выхода в предыдущий момент времени. Для алгоритмов моделирования нелинейности N , $X1$ и $Y1$ в начальный момент времени равны нулю

На основе полученных математических моделей можно построить подпрограмму моделирования универсального динамиче-

ского звена (рис. 2.44). Входными параметрами подпрограммы являются: n — номер элемента в системе, Y_n — входная величина n -го элемента; h_0 — шаг интегрирования; T — текущее время, а выходным параметром — x_n — выходная величина n -го элемента. Подпрограмма содержит в себе подпрограммы низшего уровня: подпрограмму начального диалога и подпрограммы моделирования типовых динамических звеньев.

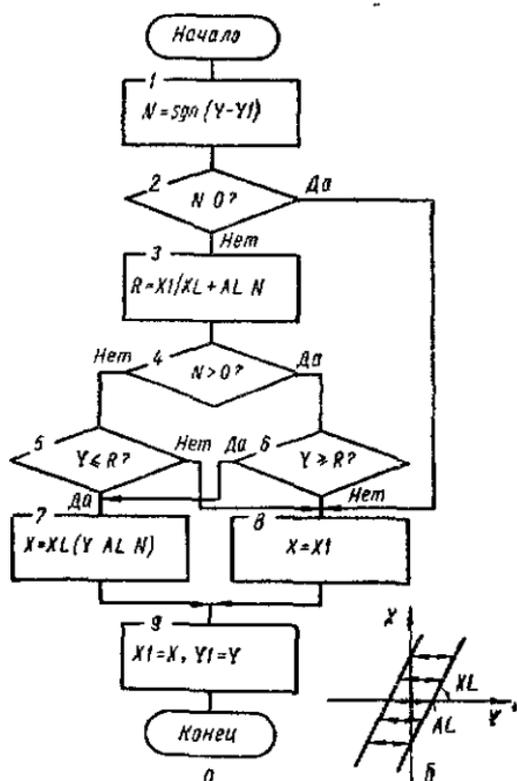


Рис. 2.43

Подпрограмма начального диалога (при $n = 0$) осуществляет ввод количества моделируемых динамических звеньев в системе, их типа и параметров в режиме диалога с пользователем. Введенный тип элемента и его параметры выводятся на терминал для контроля за правильностью ввода. В этой подпрограмме тип элемента привязывается к его номеру в системе и выполняется обнуление начальных условий. Введенные этой подпрограммой данные образуют рабочие массивы, с которыми оперируют остальные подпрограммы моделирования типовых динамических звеньев.

При обращении к подпрограмме моделирования универсального динамического звена с входным параметром $n_n \neq 0$ выбирается конкретная подпрограмма моделирования типового динамического звена, в которой K_n — идентификатор типа n -го элемента задается подпрограммой начального диалога.

Если идентификатор K_n не принадлежит к числу допустимых значений, то выводится соответствующее сообщение и выполнение подпрограммы моделирования прекращается. Подпрограммы моделирования типовых нелинейностей реализуют алгоритмы на

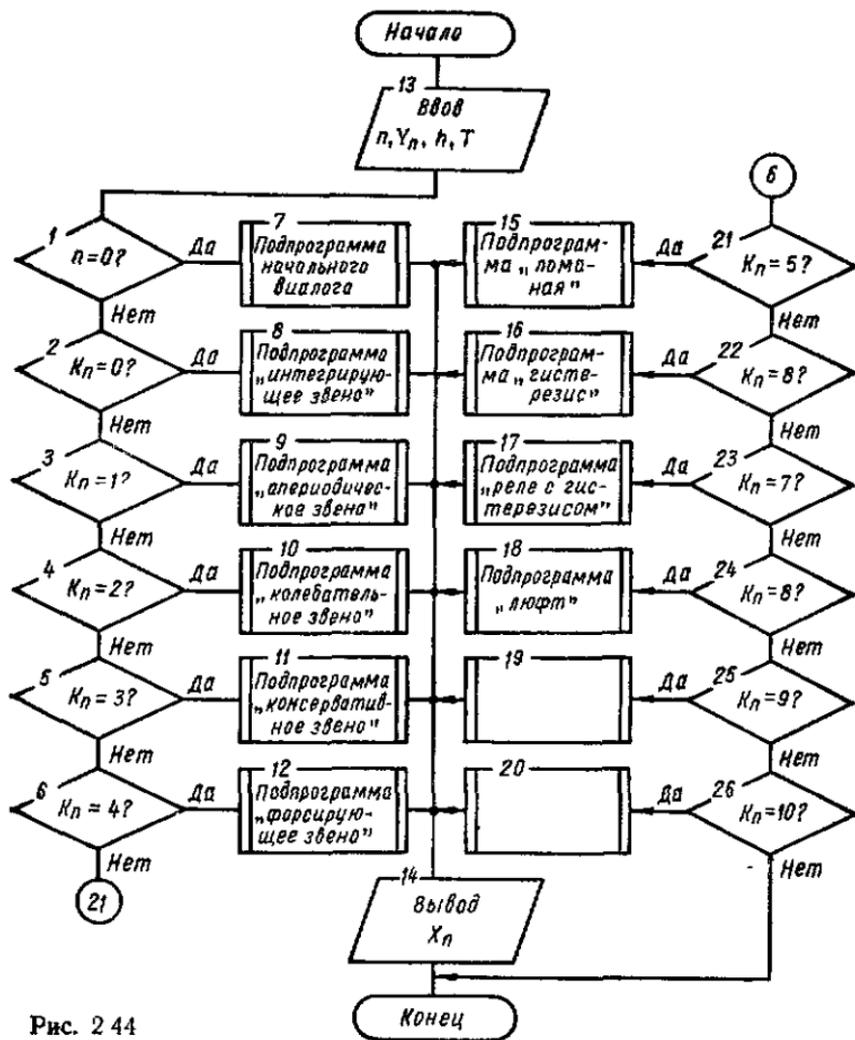


Рис. 2.44

рис. 2.40—2.43. Набор подпрограмм моделирования типовых динамических звеньев можно значительно расширить. Например, можно ввести подпрограмму расчета рекурсивного цифрового фильтра по формуле

$$x(nh) = \sum_{i=0}^l b_i y[(n-i)h] - \sum_{i=1}^l a_i x[(n-i)h],$$

где h — шаг квантования цифрового фильтра (величина h должна

быть кратна h_0 , а также подпрограмму звена типа «чистое запаздывание» и т. д.

При реализации алгоритма моделирования универсального динамического звена необходимо учитывать особенности алгоритмических языков, ориентированных для использования на конкретных микро-ЭВМ.

Глава 3

ЦИФРОВЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

3.1. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

При поступлении воздействия $u(t) = U$ на вход системы управления (рис. 1.1, а), имеющей статический объект регулирования, при поступлении воздействия $u(t) = U + \sigma t$ на вход системы (рис. 1.1, в), имеющей объект регулирования с астатизмом первого порядка, при поступлении воздействия $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$ на вход системы (рис. 1.1, г), имеющей объект регулирования с астатизмом второго порядка, и нулевых начальных условиях z -изображение оптимального управляющего воздействия (при котором переходные процессы в системах заканчиваются за N шагов квантования длительностью h) на входе объекта регулирования имеет вид

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_N z^{-N} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 - z^{-1}},$$

$$\text{где } b_0 = m_0; b_1 = m_1 - m_0; \dots; b_N = m_N - m_{N-1}; m_N \equiv$$

$\equiv m(vh^+) = u_2'(vh^+)$, а передаточная функция оптимального цифрового регулятора определяется в виде

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{(1 - z^{-1})(U + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1})}. \quad (3.2)$$

При поступлении воздействия $u(t) = U$ на вход системы (рис. 1.1, а), имеющей астатический объект регулирования, при поступлении воздействия $u(t) = U + \sigma t$ на вход системы (рис. 1.1, в), имеющей объект регулирования с астатизмом второго или более высокого порядков, при поступлении воздействия $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$ на вход системы (рис. 1.1, г), имеющей объект регулирования с астатизмом третьего или более высокого порядков, и нулевых начальных условиях z -изображение оптимального управляющего воздействия на входе объекта регулирования имеет вид

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_{N-1} z^{-N+1} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}, \quad (3.3)$$

где $b_0 = m_0$; $b_1 = m_1$; ... ; $b_{N-1} = m_{N-1}$, а передаточная функция оптимального цифрового регулятора определяется в виде

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}}{U + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1}}. \quad (3.4)$$

Величины m_v определяют площади мгновенных импульсов на выходе цифрового регулятора (амплитуды импульсов длительностью h на выходе фиксатора нулевого порядка) и зависят от параметров объекта регулирования, шага квантования h и параметров входных воздействий U , σ и λ . Например, для объекта регулирования с передаточной функцией $G(s) = \alpha/s^2$ при линейно-квадратичном воздействии $u(t) = U + \sigma t + \lambda t^2$ на входе системы оптимальный цифровой регулятор должен сформировать такое управляющее воздействие на входе объекта регулирования, z -изображение которого определяется

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_N z^{-2} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots),$$

$$\text{где } N = 2; m_0 = \frac{U}{\alpha h^2} + \frac{3}{2\alpha h} \sigma + \frac{2}{\alpha} \lambda; m_1 = -\frac{U}{\alpha h^2} - \frac{1}{2\alpha h} \sigma - \frac{2}{\alpha} \lambda; m_N = \frac{2}{\alpha} \lambda.$$

При поступлении в момент $t = 0$ на вход системы управления (рис. 1.1, а, в или г) с оптимальным цифровым регулятором соответствующего типового воздействия ошибка системы при $t \geq Nh$ равна нулю, а на выходе регулятора в переходном режиме имеется последовательность из N импульсов $m_v \approx m(vh^+)$, $v = 0, 1, \dots, N - 1$. Переходный режим в системе заканчивается за интервал регулирования $T = Nh$.

Если при поступлении на вход системы (рис. 1.1, г) произвольного входного воздействия измерять его величину, скорость и ускорение и в дискретные моменты времени $t = nT^+$ подавать на вход цифрового регулятора, оптимального для линейно-квадратичного входного воздействия, приращения $\Delta u(nT^+) = \Theta(nT^+)$, $\Delta \sigma(nT^+)$ и $\Delta \lambda(nT^+)$, то регулятор на каждом интервале регулирования $T = Nh$ сформирует такие управляющие воздействия на объект регулирования, что система отработает указанные приращения на каждом интервале $T = Nh$.

Система управления (рис. 1.1, в) с цифровым регулятором, оптимальным для линейно-изменяющегося входного воздействия, отработает на каждом интервале длительностью $T = Nh$ приращения $\Delta u(nT^+) = \Theta(nT^+)$ и $\Delta \sigma(nT^+)$. Система (рис. 1.1, а) с цифровым регулятором, оптимальным для ступенчатого входного воздействия, отработает на каждом интервале $T = Nh$ только ошибки $\Theta(nT^+)$, т. е. приращения входного воздействия $\Delta u(nT^+)$.

Общая структурная схема системы, работающей при произвольных входных воздействиях, изображена на рис. 3.1. С выхода измерителя скорости I_σ и измерителя ускорения I_λ дискретные значения $\sigma(nT^+)$ и $\lambda(nT^+)$ поступают на звено задержки с передаточной функцией e^{-Ts} и вычитатель. На входы 2 и 3 цифрового регулятора поступают значения $\Delta \sigma(nT^+) = \sigma(nT^+) - \sigma[(n-1)T^+]$ и $\Delta \lambda(nT^+) = \lambda(nT^+) - \lambda[(n-1)T^+]$, $n = 0, 1, 2,$

... Дискретные значения ошибки $\Theta(nT^+)$ поступают на вход 1 регулятора.

Общая структурная схема цифрового регулятора, построенная на линиях задержки ЛЗ, множительных устройствах и сумматоре, изображена на рис. 3.2. Количество элементов в схеме

рис. 3.2 зависит, в первую очередь, от передаточной функции объекта регулирования. Например, при $G(s) = \alpha/s^2$ требуется уста-

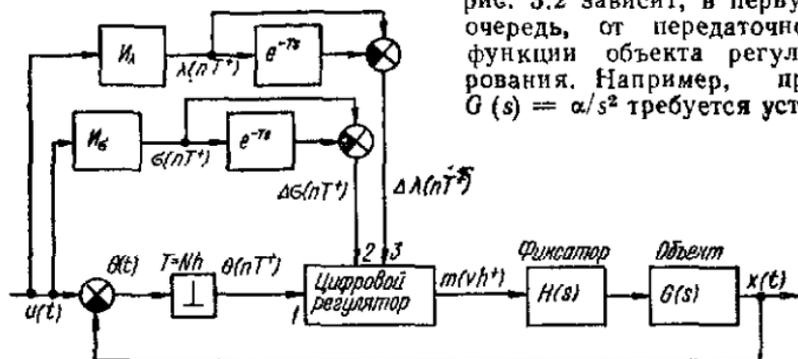


Рис. 3.1.

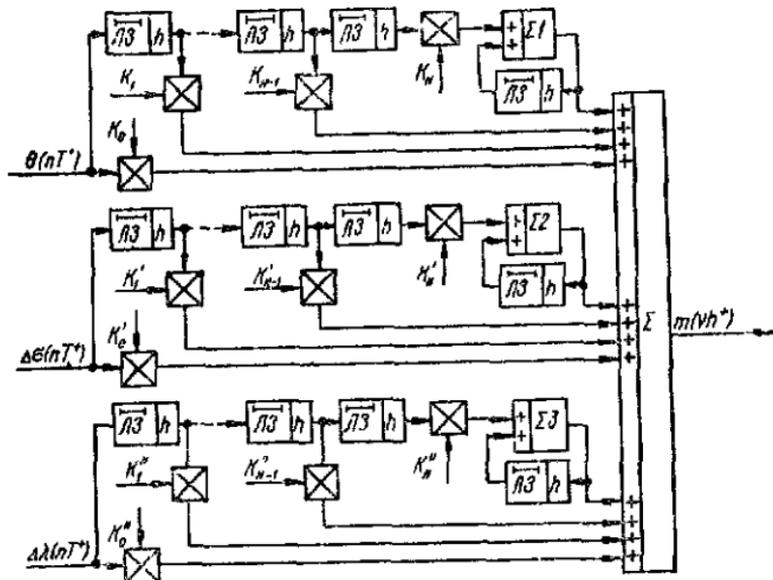


Рис. 3.2

новить следующие коэффициенты: $K_0 = 1/(\alpha h^2)$; $K_1 = -1/(\alpha h^2)$; $K'_0 = 3/(2\alpha h)$; $K'_1 = -1/(2\alpha h)$; $K''_0 = 2/\alpha$; $K''_1 = -2/\alpha$; $K''_2 = 2/\alpha$, а также по одному элементу задержки в первых двух каналах обработки $\Theta(nT^+)$ и $\Delta\sigma(nT^+)$ и три элемента задержки в третьем канале обработки $\Delta\lambda(nT^+)$. Звенья с элементами задержки в обратной связи можно заменить дополнительными каналами формирования «подставок» (см. рис. 2.4, 2.8). На основе схемы рис. 3.2 можно построить большое количество схем цифровых регуляторов, которые обеспечат

работу систем автоматического управления при произвольных входных воздействиях. При этом качество работы системы определяется тем, какой оптимальный регулятор (оптимальный для ступенчатого, линейно-изменяющегося или линейно-квадратичного входного воздействия) положен в основу практической схемы цифрового регулятора, которая обеспечивает работу системы при произвольном входном воздействии. Регуляторы можно реализовать на аналоговых элементах [1; 2; 36; 43] и на цифровых элементах [2; 30; 35].

3.2. РЕГУЛЯТОРЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В общем виде контур систем автоматического управления с одним входом и одним выходом можно представить как последовательное соединение регулятора и объекта регулирования. При таком рассмотрении регулятор в системе рис. 3.1 представляет собой последовательное соединение мгновенного ключа с шагом квантования $T = Nh$, цифрового регулятора с измерительными связями и фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией $H(s) = (1 - e^{-hs})/s$. Регулятор должен формировать требуемые управляющие воздействия на входе объекта регулирования.

Техническая реализация регуляторов, оптимальных при ступенчатых входных воздействиях, на основе структурных схем рис. 3.1 и 3.2 (а также рис. 2.1, б и 2.4) будет различной в зави-

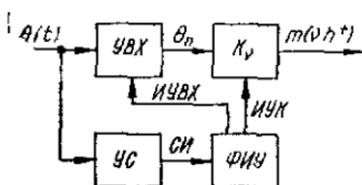


Рис. 3.3

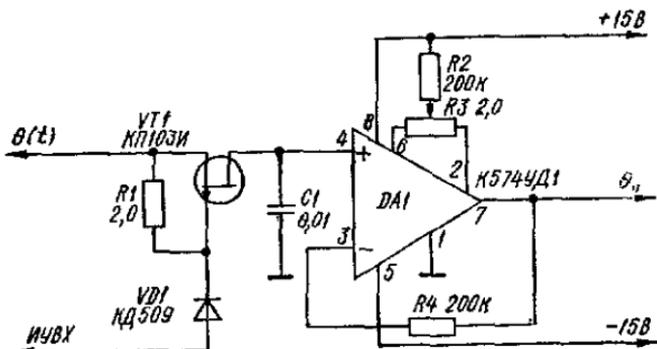
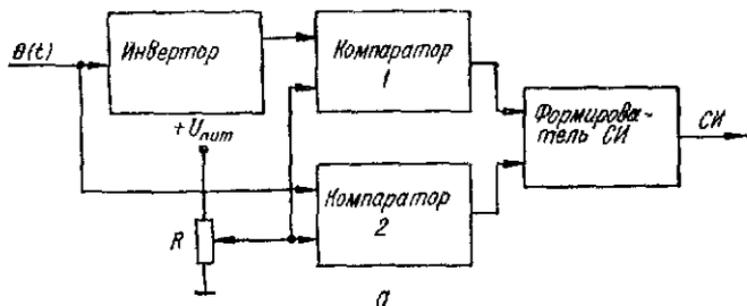


Рис. 3.4

симости от того, какой объект регулирования (астатический или статический) имеется в системе. Наиболее простой задачей является построение регуляторов для систем с астатическими объектами регулирования. Выходной сигнал таких регуляторов при ступенчатом воздействии на входе системы после окончания переходных процессов за время $T = Nh$ тождественно равен нулю.

Функциональная схема регулятора, оптимального при ступенчатых входных воздействиях изображена на рис. 3.3. Схема



а

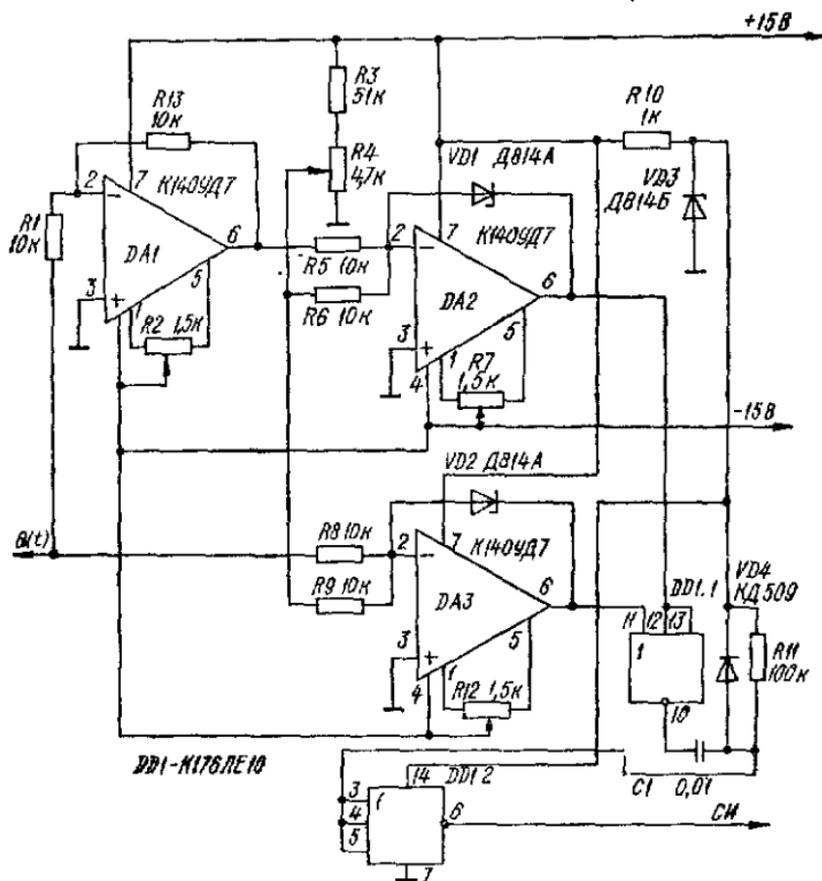


Рис. 3.5

б

состоит из четырех основных блоков. Первый блок — устройство выборки и хранения УВХ — объединяет квантователь (мгновенный ключ) и фиксатор нулевого порядка. Простая схема УВХ показана на рис. 3.4. Ключ $VT1$ на полевом транзисторе типа КП103И размыкается и замыкается командным сигналом — импульсами управления УВХ (ИУВХ). Когда ключ замкнут, выходной сигнал УВХ изменяется в соответствии с входным

сигналом ошибки $\Theta(t)$. Когда ключ разомкнут, выходной сигнал определяется напряжением на конденсаторе $C1$, которое подается на буферный усилитель $DA1$ с высоким входным сопротив-

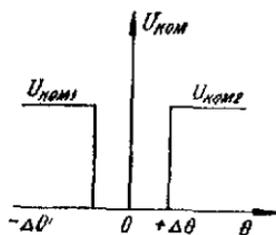


Рис. 3.6

лением, собранный на микросхеме типа $K574UD1$. Поскольку время выборки (временной интервал, в течение которого ключ замкнут) значительно меньше периода $T = Nh$, то сигнал на выходе $УВХ$ $\Theta_n = \Theta(nT^+) = \Theta(t)$ при $t = nT^+$, $T = Nh$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Второй блок — устройство синхронизации $УС$, которое при скачкообразном изменении входного сигнала $\Theta(t)$ обеспечивает немедленную обработку этого изменения. Устройство синхронизации (рис. 3.5) состоит из инвертора (операционный усилитель $DA1$ типа $K140UD7$), двух компараторов напряжения (операционные усилители $DA2$, $DA3$ типа $K140UD7$) и формирователя синхронизирующего импульса $СИ$, собранного на логических элементах $DD1$, $1, 2$ (микросхема $K176JE10$). Устройство синхронизации имеет релейную характеристику (рис. 3.6) с регулируемой зоной нечувствительности: $U_{ком1}$, $U_{ком2}$ — выходные напряжения компараторов на операционных усилителях $DA2$ и $DA3$ при выходе сигнала $\Theta(t)$ за зону нечувствительности $2\Delta\theta$. Величина зоны нечувствительности устанавливается переменным резистором $R4$ (рис. 3.5, 6). Если величина сигнала $\Theta(t)$ превысит значение $\Delta\theta$, то на выходе

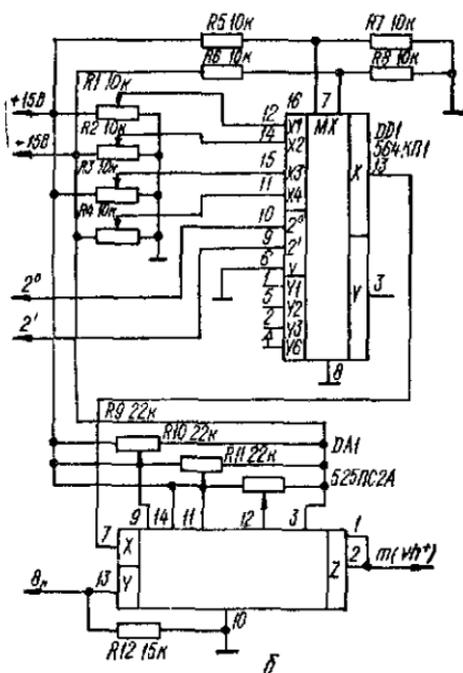
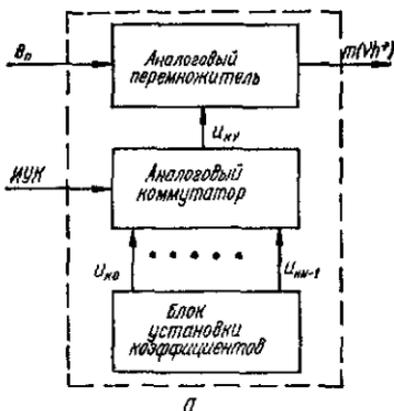


Рис. 3.7

УС сформируется синхронизирующий импульс положительной полярности амплитудой около 8 В и длительностью 100 мкс.

Третий блок — устройство с переменным коэффициентом передачи K_v , обеспечивающее преобразование сигнала Θ_n в последовательность N импульсов длительностью h , с амплитудами $m(0^+)$, $m(h^+)$, Устройство с переменным коэффициентом передачи можно реализовать с использованием усилителя с регулируемым коэффициентом передачи [43], аналогового перемножителя [2], перемножающего цифроаналогового преобразователя [2] или с использованием регулируемых делителей напряжения. На рис. 3.7 и 3.9 показаны структурные (а) и принципиальные (б) схемы двух устройств с переменным коэффициентом передачи, обеспечивающих формирование управляющих воздействий для объектов регулирования, описываемых дифференциальными уравнениями до четвертого порядка включительно.

Первое устройство (рис. 3.7, а) состоит из аналогового перемножителя напряжений (микросхема DA1 типа К525ПС2А), коммутатора аналоговых сигналов (микросхема DD1 типа Б64КП1) и блока установки коэффициентов передачи, выполненного в виде набора регулируемых делителей напряжения (переменные резисторы $R1...R4$). Постоянные напряжения u_{k0} , ... u_{kN-1} , пропорциональные коэффициентам передачи K_v устройства на v -м шаге в пределах интервала регулирования $T = Nh$, снимаются с переменных резисторов $R1...R4$ и поступают на входы $X1...X4$ коммутатора аналоговых сигналов. Управление коммутатором осуществляется параллельным двоичным кодом текущего номера шага регулирования — импульсами управления коммутатором ИУК. На выходе X коммутатора образуется последовательность импульсов u_{kv} длительностью h , амплитуды и полярности которых соответствуют требуемым коэффициентам передачи K_v . Полученная последовательность импульсов поступает на вход X аналогового перемножителя напряжения, на второй вход Y которого подается сигнал Θ_n . В результате перемножения сигналов Θ_n и u_{kv} на выходе Z аналогового перемножителя образуется последовательность импульсов напряжения $m(vh^+)$, являющаяся выходным сигналом регулятора. Эпюры, поясняющие работу рассмотренного регулятора при отработке системой на рис. 3.1 произвольного входного воздействия, изображены на рис. 3.8 (при использовании такого регулятора измерительные связи в системе отсутствуют).

Второе устройство (рис. 3.9) состоит из инвертора на операционном усилителе (микросхема DA1 типа К140УД7), делителей прямого сигнала (переменные резисторы $R6, R7$), делителей инвертированного сигнала (переменные резисторы $R4, R5$) и коммутатора аналоговых сигналов MX (микросхема DD1 типа К564КП1). В этом устройстве регулирующее воздействие (последовательность импульсов $m(vh^+)$) формируется путем последовательного подключения на интервалах времени $(0, h)$, $(h, 2h)$, $(2h, 3h)$, $(3h, 4h)$ ко входу объекта регулирования напряжений $u_{mv} = \Theta_n K_{dv}$, где $K_{dv} = K_v / K_{max}$ — коэффициент передачи устройства на v -м шаге регулирования; K_v — расчетное значение коэффициента передачи на v -м шаге регулирования; K_{max} — максимальный коэффициент передачи из числа коэффициентов K_v . Эпюры, поясняющие работу этого устройства при отработке

системой на рис. 3.1 произвольного входного воздействия, изборожены на рис. 3.10.

Четвертый блок в схеме на рис. 3.3 — формирователь импульсов управления ФИУ. Он обеспечивает формирование импульсов управления коммутатором аналоговых сигналов ИУК в виде параллельного двоичного кода — номера шага регулирования (до 10 шагов в пределах интервала регулирования $T = Nh$) и импульсов управления устройством выборки и хране-

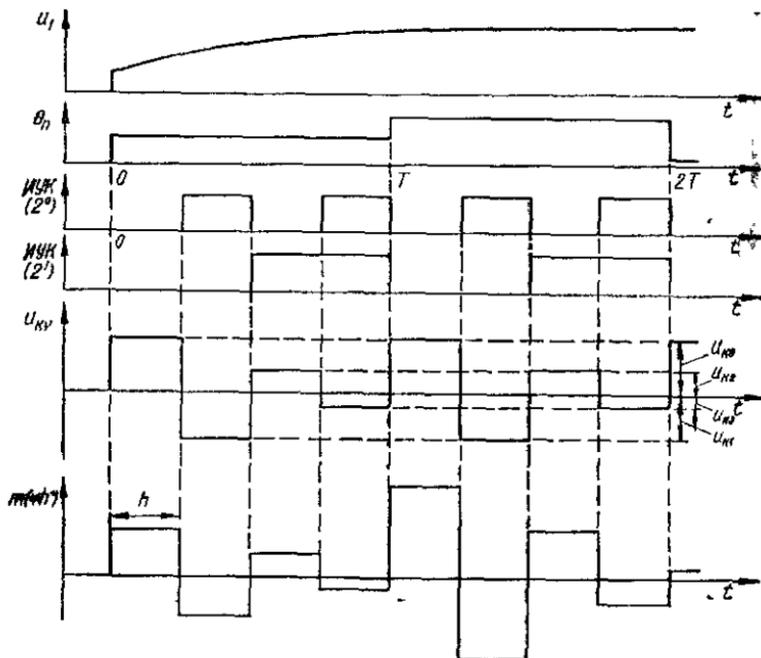
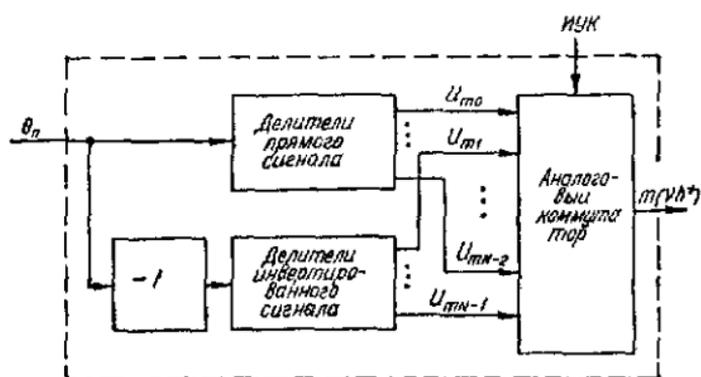


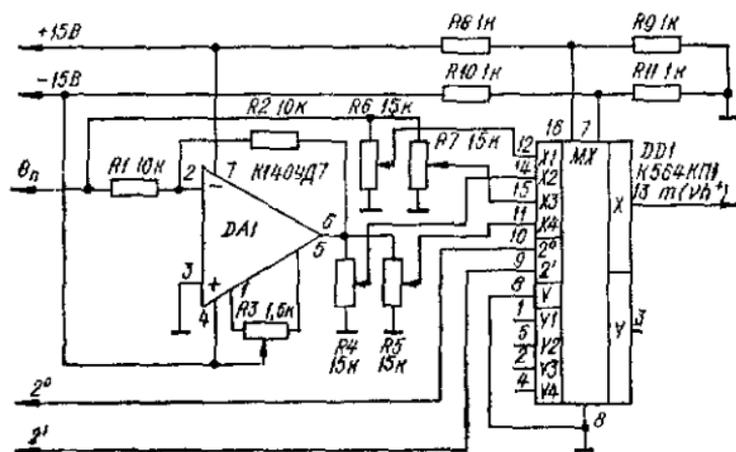
Рис. 3.8

ния ИУВХ длительностью около 100 мкс и размахом от +15 до -15 В, что обеспечивает выборку сигнала ошибки, изменяющегося в диапазоне ± 10 В.

Функциональная схема формирователя импульсов управления ФИУ показана на рис. 3.11, принципиальная схема — на рис. 3.12. В состав ФИУ входят: генератор тактовых импульсов ТИ1 (микросхемы DD2.3, DD2.4 типа К176ЛА7); счетчик-делитель частоты с коэффициентом деления $K_{\text{дел}} = 256$ (микросхемы DD4, DD5 типа К564ИЕ11); формирователь тактовых импульсов ТИ2 с периодом h (микросхема DD7.1 типа К561ЛН2); счетчик текущего номера шага регулирования ν (микросхема DD3 типа К564ИЕ11); дешифратор текущего номера шага регулирования ν (микросхема DD6 типа К176ИД1); схема управления счетчиком, состоящая из переключателя SA1 — порядка дифференциального уравнения, которым описывается объект регулирования, и логических элементов И — НЕ (микросхемы DD1.1...DD1.4,



а



б

Рис. 3.9

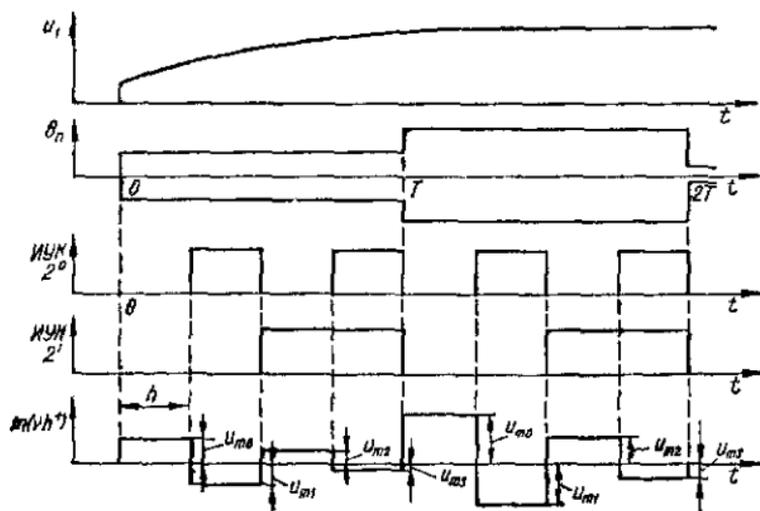


Рис. 3.10

DD2.1, DD2.2 типа К176ЛА7); формирователь импульсов управления *УВХ* (*ИУВХ*) на транзисторах *VT1*, *VT2*.

Эпюры, поясняющие работу схемы ФИУ при формировании импульсов управления в регуляторе на рис. 3.3 для объекта регулирования четвертого порядка, изображены на рис. 3.13: *ТИ1* — тактовые импульсы на выводе 11 микросхемы DD2.4; *ТИ2* — тактовые импульсы на выводе 2 микросхемы DD7.1; *СИ* — синхронизирующие импульсы, формируемые устройством синхронизации при скачкообразном изменении сигнала ошибки $\theta(t)$; *ИУ0* — импульсы установки в нулевое состояние счетчика текущего номера шага регулирования (вывод 3 микросхемы

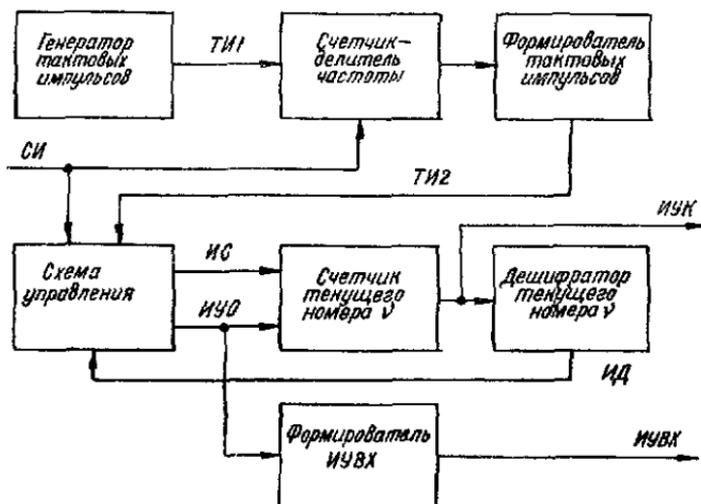
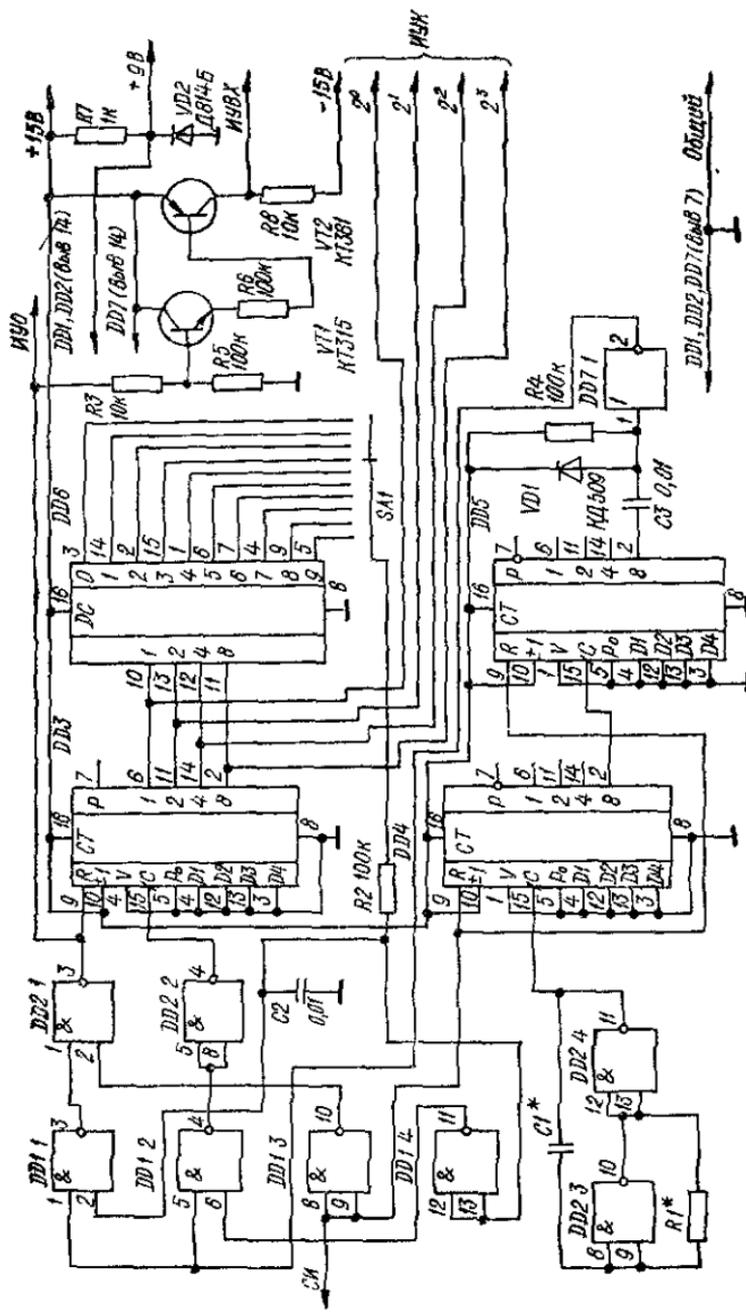


Рис. 3.11

DD2.1); *ИУВХ* — импульсы управления устройством выборки и хранения; *ИУК* — импульсы управления коммутатором (двухразрядный параллельный двоичный код, выходы 6, 11 микросхемы DD3), *ИД* — импульсы на выходе 3 дешифратора (вывод 15 микросхемы DD6); *ИС* — импульсы счета шагов регулирования (вывод 4 микросхемы DD2.2).

Счетчик-делитель частоты (микросхемы DD4, DD5) преобразует тактовые импульсы *ТИ1* в последовательность тактовых импульсов *ТИ2*, которые через схему совпадения и инвертор (микросхемы DD1.2, DD2.2) поступают на вход счетчика текущего номера шага регулирования (вывод 15 микросхемы DD3). Параллельный двоичный код текущего номера шага регулирования с выходов счетчика (выводы 6, 11, 14, 2 микросхемы DD3) подается на управление коммутатором аналоговых сигналов устройства с переменным коэффициентом передачи и одновременно на входы дешифратора текущего номера *v* (выводы 10, 13, 12, 11 микросхемы DD6). Один из выходов дешифратора, номер которого соответствует порядку дифференциального уравнения, описывающего объект регулирования, через переключатель *SA1* подключается к схеме управления, благодаря чему цикл формирования управляющих сигналов непрерывно повторяется. Если текущий



$DD1, DD2 - К176 ПА7; DD3, DD4, DD5 - К56-МЕ11, DD6 - К176 ПД1, DD7 - К561 ПД2$

Рис. 3.12

номер шага регулирования $\nu < N - 1$, где N — порядок дифференциального уравнения объекта регулирования, то напряжение логического «0» с выбранного выхода дешифратора поступает на инвертор (выводы 12, 13 микросхемы DD1.4), а с выхода инвертора (вывод 11 микросхемы DD1.4), напряжение логической «1» поступает на второй вход схемы совпадения (вывод 6 микросхемы DD1.2), разрешая прохождение очередного тактового импульса $TИ2$ на вход счетчика. При $\nu = N - 1$ на выбранном с помо-

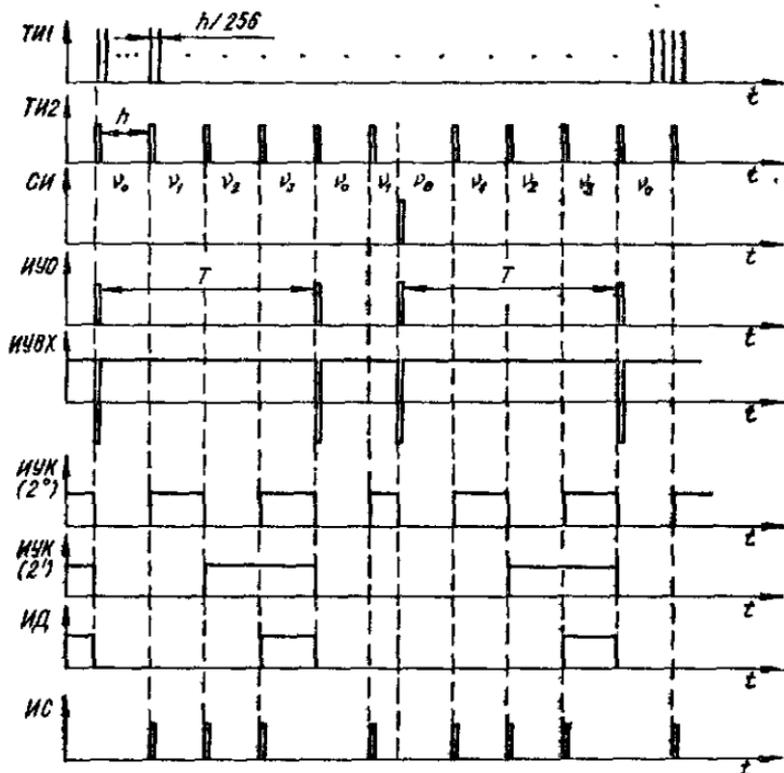


Рис 3.13

щью переключателя $SA1$ выходе дешифратора появляется напряжение логической единицы и очередной импульс $TИ2$ поступает через схемы совпадения DD1.1 и DD1.2 на вход установки счетчика текущего номера шага регулирования в нулевое состояние (вывод 9 микросхемы DD3) и одновременно подается на схему формирования импульсов управления повторяется.

При поступлении импульса синхронизации счетчик-делитель частоты и счетчик текущего номера шага регулирования устанавливаются в нулевое состояние, а также формируется импульс управления $УВХ$. Тем самым схема $ФНУ$ переводится в режим немедленной (с задержкой не более одного периода тактовой частоты $TИ1$) обработки скачкообразного входного воздействия.

Более сложной задачей является построение цифровых регуляторов, оптимальных при ступенчатых входных воздействиях для систем со статическими объектами регулирования. Регулятор при ступенчатом воздействии на входе системы управления (см. рис. 2.4 и рис. 3.1), кроме основных импульсов в переходном режиме, должен задавать в установившемся режиме «подставку» — постоянный сигнал на входе объекта регулирования. Например, если объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [(s+a)(s+b)]^{-1}$, то регулятор при ступенчатом воздействии на входе системы величиной U должен обеспечивать на входе объекта регулирования два импульса длительностью h с амплитудами $m_0 = K_0 U$ и $m_1 = K_0(1-A-B)U$,

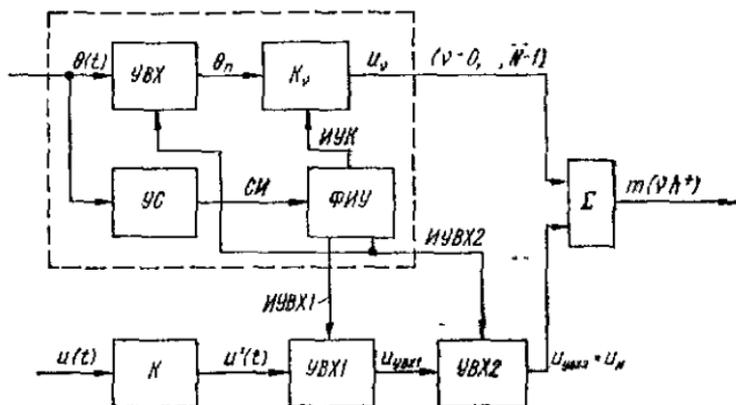
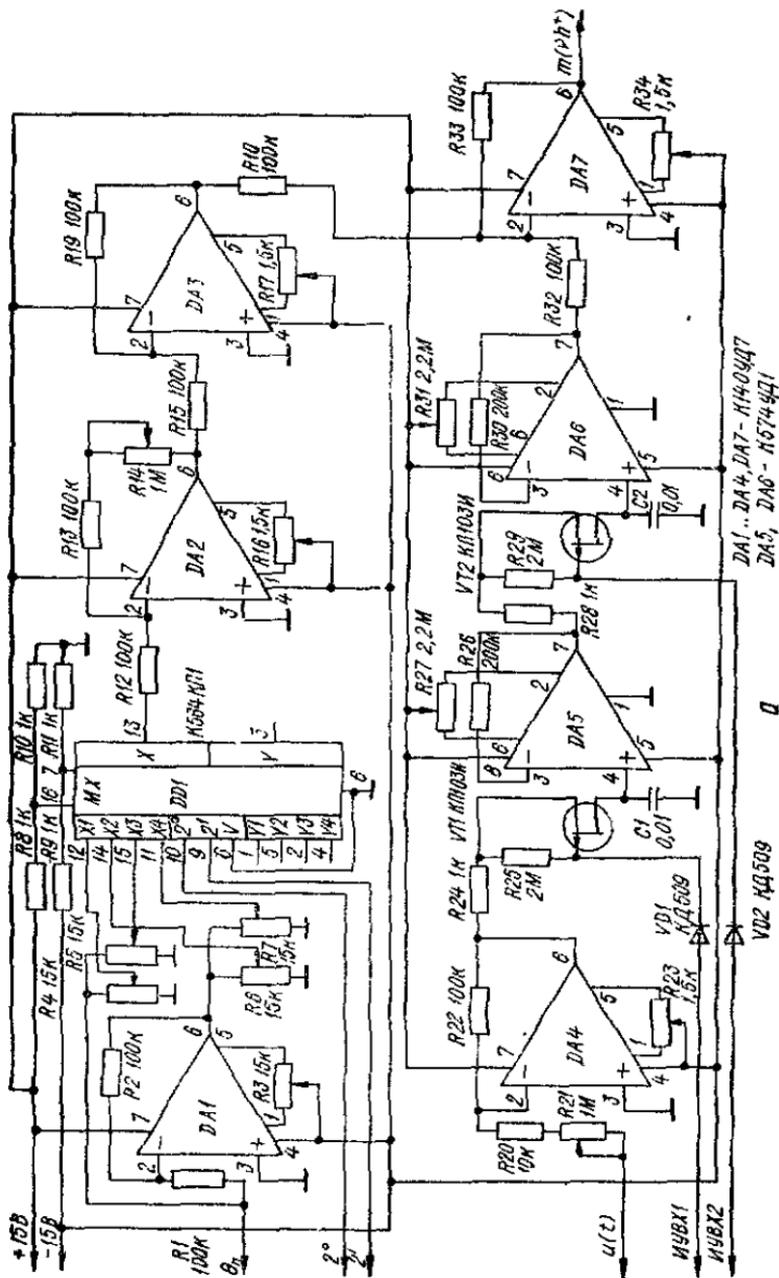


Рис. 3.14

где $K_0 = ab [\alpha (1-A)(1-B)]^{-1}$; $A = e^{-ah}$, $B = e^{-bh}$, а в установившемся режиме — постоянную величину $m_N = m_2 = abU/\alpha$. Пусть система на рис. 2.4 обрабатывает произвольное входное воздействие $u(t)$ (см. рис. 2.2). Тогда за время $T = 2h$ в интервале $0 < t \leq T$ система обрабатывает мгновенный импульс ошибки площадью $\Theta(0) = u(0) - x(0) = u(0)$, и на выходе системы в момент $t = T$ установится величина $x(T) = u(0)$, а на выходе регулятора после фиксатора нулевого порядка — величина $ab\Theta(0)/\alpha = abu(0)/\alpha$. В промежутке времени $T < t \leq 2T$ система обрабатывает мгновенный импульс ошибки площадью $\Theta(T) = u(T) - x(T) = u(T) - u(0)$, и на выходе системы в момент $t = 2T$ установится величина $x(2T) = u(T)$, а на выходе регулятора после фиксатора нулевого порядка — величина $ab[\Theta(0) + \Theta(T)]/\alpha = abu(T)/\alpha$. В промежутке времени $2T < t \leq 3T$ система обрабатывает мгновенный импульс ошибки площадью $\Theta(2T) = u(2T) - x(2T) = u(2T) - u(T)$ и на выходе системы в момент $t = 3T$ установится величина $x(3T) = u(2T)$, а на выходе регулятора после фиксатора нулевого порядка — величина $ab[\Theta(0) + \Theta(T) + \Theta(2T)]/\alpha = abu(2T)/\alpha$ и т. д. В промежутке времени $nT < t \leq (n+1)T$ система обрабатывает мгновенный импульс ошибки площадью $\Theta(nT) = u(nT) - x(nT) = u(nT) - u[(n-1)T]$, и на выходе системы в момент $t = (n+1)T$ установится величина $x[(n+1)T] = u(nT)$, а на выходе цифрового регулятора после фиксатора нулевого порядка — величина $ab[\Theta(0) + \Theta(T) + \dots + \Theta(nT)]/\alpha = abu(nT)/\alpha$.



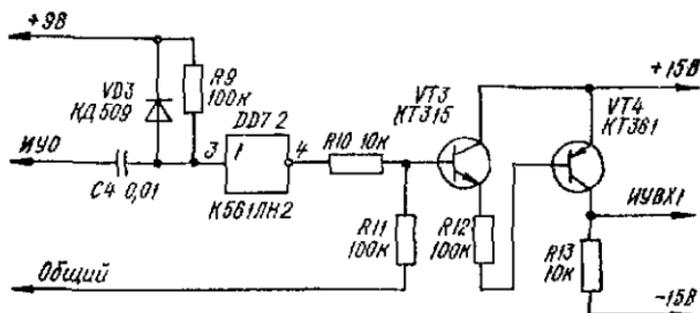


Рис. 3.15

б

Функциональная схема регулятора для систем управления со статическими объектами регулирования показана на рис. 3.14. Регулятор состоит из тех же четырех устройств, что и в схеме на рис. 3.3 (обведены штриховой линией): основного устройства выборки и хранения *УВХ*, устройства синхронизации *УС*, формирователя импульсов управления *ФИУ* и устройства с переменным коэффициентом передачи K_v , которое обеспечивает формирование управляющих воздействий u_v , $v = 0, \dots, N - 1$, в течение интервалов регулирования $T = Nh$. Кроме того, в регулятор дополнительно введены масштабирующий усилитель с коэффициентом K ; два последовательно включенных устройства выборки и хранения (*УВХ1* и *УВХ2*), запоминающие значение $u'(t)$ в начале интервала регулирования и передающие это значение к объекту регулирования в виде сигнала u_N в конце каждого интервала регулирования; сумматор Σ , на выходе которого выделяются все сформированные управляющие воздействия на объект регулирования.

Принципиальная схема регулятора на рис. 3.3 (функциональные блоки которого обведены на рис. 3.14 штриховой линией) подробно описана. Поэтому на рис. 3.15, а изображена принципиальная схема регулятора рис. 3.14, за исключением блоков *УВХ*, *УС* и *ФИУ*, а на рис. 3.16 — эюры, поясняющие работу этой схемы при обработке системой на рис. 2.4 (или системой на рис. 3.1) произвольного входного воздействия.

Сигнал рассогласования θ_n поступает на устройство с переменным коэффициентом передачи (рис. 3.15, а), в состав которого входят: делители прямого сигнала (переменные резисторы R_4 , R_5); инвертор сигнала рассогласования (микросхема *DA1* типа $K140УД7$); делители инвертированного сигнала (переменные резисторы R_6 , R_7); коммутатор аналоговых сигналов (микросхема *DD1* типа $K564КП1$), управляемый импульсами управления коммутатором *ИУК*, поступающими с формирователя импульсов управления *ФИУ*.

С выхода X коммутатора (вывод *13* микросхемы *DD1*) сформированное в виде последовательности импульсов управляющее воздействие u_v , $v = 0, \dots, N - 1$ через масштабирующий усилитель и инвертор (микросхемы *DA2*, *DA3* типа $K140УД7$), которые обеспечивают требуемую амплитуду и полярность управляющего воздействия, поступает на первый вход (резистор R_{18}) сумматора (микросхема *DA7* типа $K140УД7$), с выхода которого подается на объект регулирования.

Управляющее воздействие в конце интервала регулирования формируется в этом устройстве следующим образом. Напряжение входного воздействия $u(t)$ поступает на масштабирующий усилитель, выполненный на микросхеме DA4 типа K140УД7. Напряжение $u'(t)$ с вывода 6 микросхемы DA4 поступает на УВХ1 (транзистор VT1 типа КП103И, микросхема DA5 типа

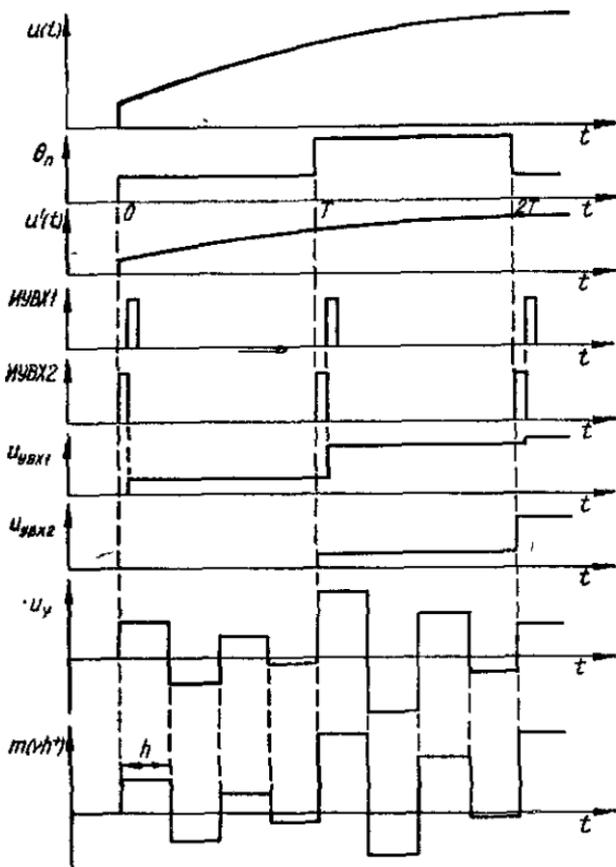


Рис. 3.16

K574УД1). Импульсы управления УВХ ($ИУВХ1$, $ИУВХ2$) сдвинуты во времени относительно друг друга таким образом, что фронт $ИУВХ1$ совпадает со спадом $ИУВХ2$. Благодаря этому запоминание очередного значения $u'(t)$ в УВХ1 осуществляется после того, как в УВХ2 (транзистор VT2, микросхема DA6 типа K574УД1) запомнится (в момент поступления $ИУВХ2$) предыдущее значение $u'(t)$, что обеспечивает формирование управляющего воздействия u_N , соответствующего окончанию предыдущего интервала регулирования. С выхода УВХ2 (вывод 7 микросхемы DA6) сформированное управляющее воздействие поступает на второй вход (резистор R32) сумматора (микросхема DA7) и с выхода сумматора подается на объект регулирования.

В качестве импульсов управления $УВХ2$ ($ИУВХ2$) используются импульсы $ИУВХ$ (см. рис. 3.12). Для формирования импульсов управления $УВХ1$ ($ИУВХ2$) формирователь импульсов управления $ФИУ$ (рис. 3.12) дополняется схемой на рис. 3.15, б, состоящей из элемента задержки (микросхема DD7.2 типа К561Лс2) и формирователя импульсов управления $УВХ1$ (транзисторы $VT3, VT4$). На вход схемы на рис. 3.15, б поступают импульсы установки в нулевое состояние счетчика текущего номера шага регулирования $ИУО$ (вывод 3 микросхем DD2.1 на рис. 3.12).

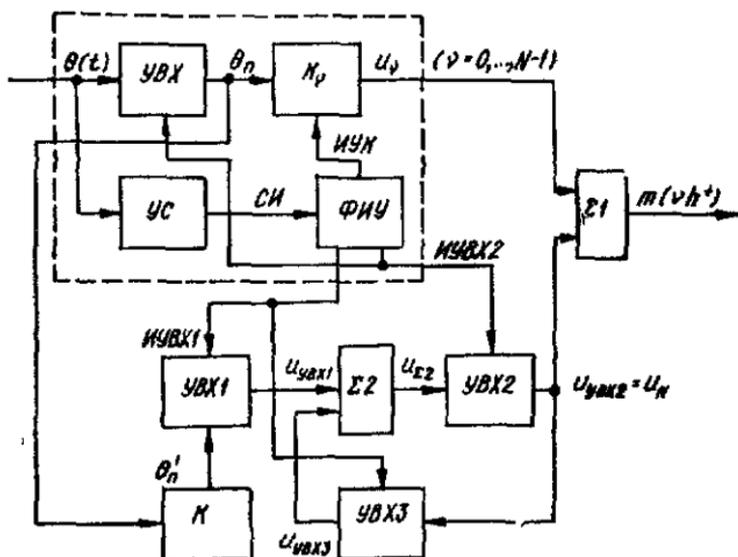
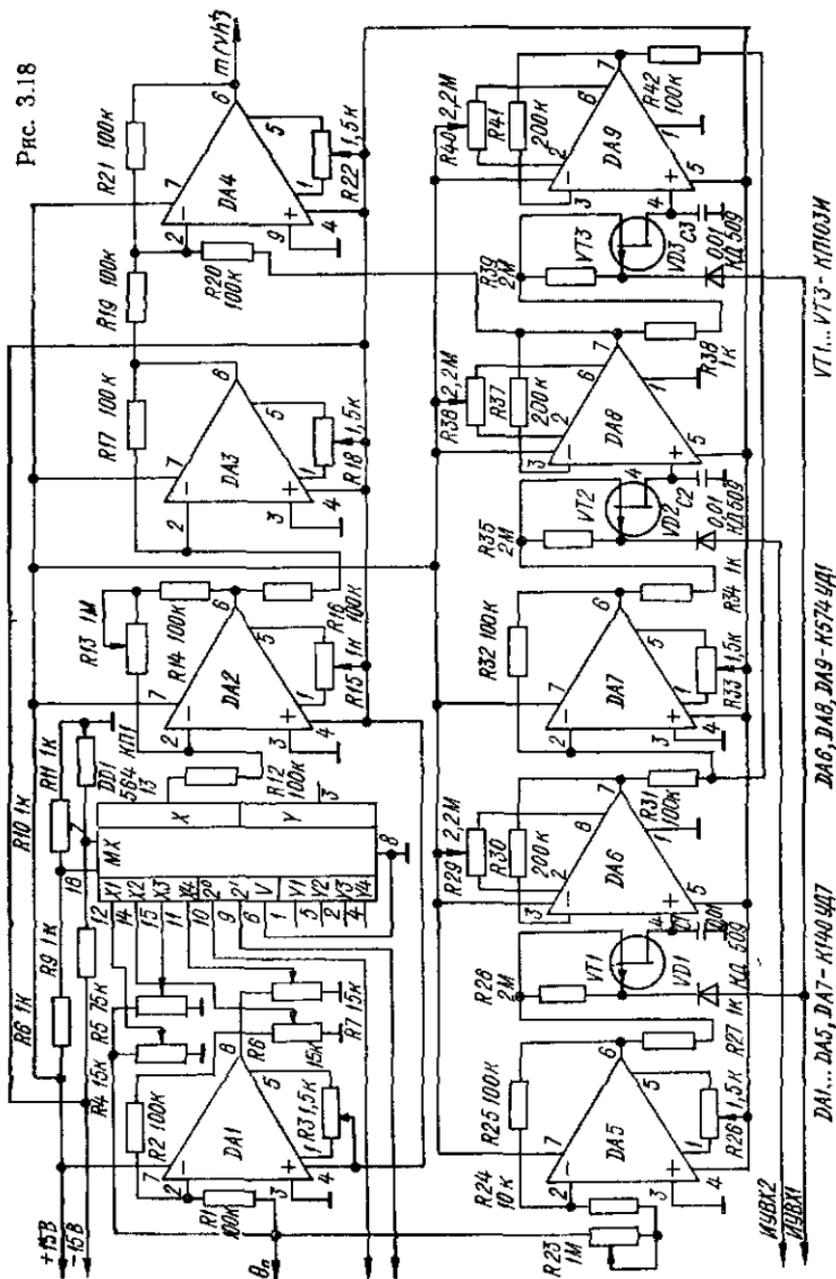


Рис. 3.17

Другая функциональная схема регулятора, обеспечивающего формирование управляющих воздействий $m(nh^+)$ на входе объектов регулирования с астатизмом нулевого порядка, показана на рис. 3.17. В этом регуляторе управляющее воздействие u_N на входе объекта после окончания переходных процессов (сигнал «подставки») формируется из сигнала ошибки системы, поэтому этот регулятор можно использовать и в том случае, когда вход системы управления не является электрической величиной. Регулятор, собранный по схеме на рис. 3.17, по сравнению с регулятором на рис. 3.14 имеет дополнительно второй сумматор $\Sigma 2$ и устройство выборки хранения $УВХ3$. На рис. 3.18 показана принципиальная схема регулятора рис. 3.17, за исключением блоков $УВХ$, $УС$ и $ФИУ$, а на рис. 3.19 — эшюры, поясняющие работу этой схемы при обработке системой на рис. 3.1 (или на рис. 2.4), произвольного входного воздействия.

Сигнал рассогласования θ_n в этом устройстве (см. рис. 3.18) поступает одновременно на вход устройства с переменным коэффициентом передачи и на вход масштабирующего усилителя для формирования напряжения θ'_n . Устройство с переменным коэффициентом передачи состоит из делителей прямого сигнала (переменные резисторы $R4, R5$), инвертора сигнала рассогласования (микросхема DA1 типа К140УД7), делителей инвертированного

Рис. 3.18



VT1...VT3 - КМ103М

DA6, DA8, DA9 - К574-УД1

DA1...DA5, DA7 - К140-УД7

И58К2
УД8А1

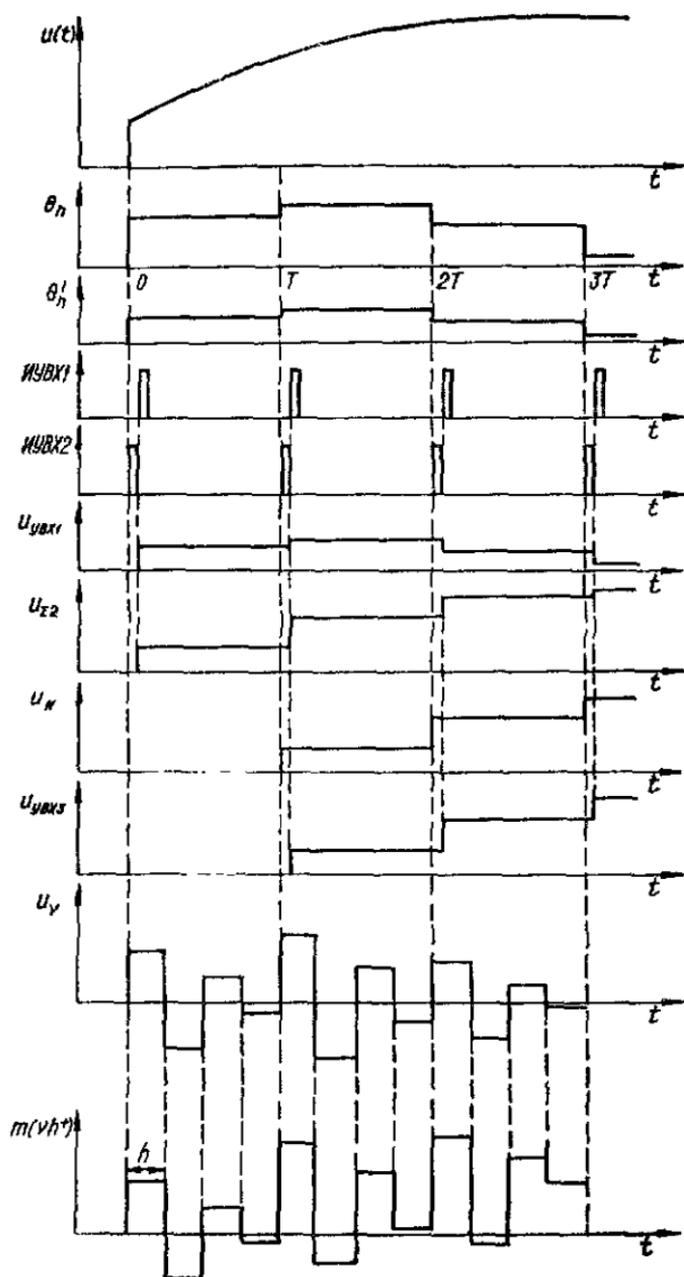


Рис. 3.19

сигнала (переменные резисторы $R6$, $R7$) и коммутатора аналоговых сигналов (микросхема DD1 типа К564КП1).

С выхода X коммутатора (вывод 13 микросхемы DD1) сформированное в виде последовательности импульсов управляющее воздействие u_v , $v = 0, \dots, N - 1$ через масштабирующий усилитель и инвертор (микросхемы DA2, DA3 типа К140УД7), которые обеспечивают требуемую амплитуду и полярность управляющего воздействия, поступает на первый вход (резистор $R19$) сумматора $\Sigma 1$ (микросхема DA4 типа К140УД7). Формирователь напряжения Θ'_n представляет собой масштабирующий усилитель, выполненный на микросхеме DA5 типа К140УД7. Напряжение Θ'_n поступает на вход $УВХ1$ (транзистор VT1 типа КП103И, микросхема DA6 типа К574УД1), в котором запоминается на время текущего интервала регулирования $T_i = Nh$ и подается на первый вход (резистор $R31$) сумматора $\Sigma 2$ (микросхема DA7 типа К140УД). На второй вход этого сумматора (резистор $R42$) подается запомненное в $УВХ3$ (транзистор VT3 типа КП103И, микросхема DA9 типа К574УД1) значение суммы напряжений Θ'_n в предыдущем T_{i-1} интервале регулирования. Это же значение суммы напряжений Θ'_n хранится в $УВХ2$ (транзистор VT2 типа КП103И, микросхема DA8 типа К574УД1) и выдается в качестве напряжения u_N на второй вход (резистор $R20$) сумматора $\Sigma 1$. Последовательное суммирование напряжений Θ'_n обеспечивается временной расстановкой импульсов управления $УВХ$ ($ИУВХ1$, $ИУВХ2$), которые смещены во времени относительно друг друга таким образом, что начало $ИУВХ1$ совпадает с окончанием $ИУВХ2$. С выхода сумматора $\Sigma 1$ (вывод 6 микросхемы DA4) сформированное управляющее воздействие m (vh^+) подается на вход объекта регулирования.

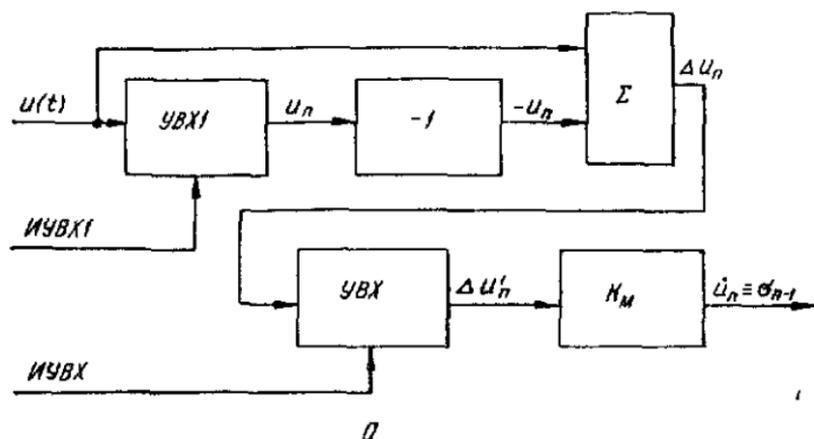
3.3. РЕГУЛЯТОРЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРИ ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Необходимым элементом цифровых регуляторов, оптимальных при линейно изменяющихся воздействиях на входе систем на рис. 1.1, а и рис. 3.1, является устройство измерения скорости входного воздействия. Функциональная и принципиальная схемы простого измерителя средней за период измерения скорости изменения входного воздействия $u(t)$ показаны на рис. 3.20. Измеритель скорости состоит из двух устройств выборки и хранения $УВХ$ и $УВХ1$, инвертора, сумматора Σ и масштабирующего усилителя K_m . Эпюры, поясняющие работу измерителя скорости, изображены на рис. 3.21.

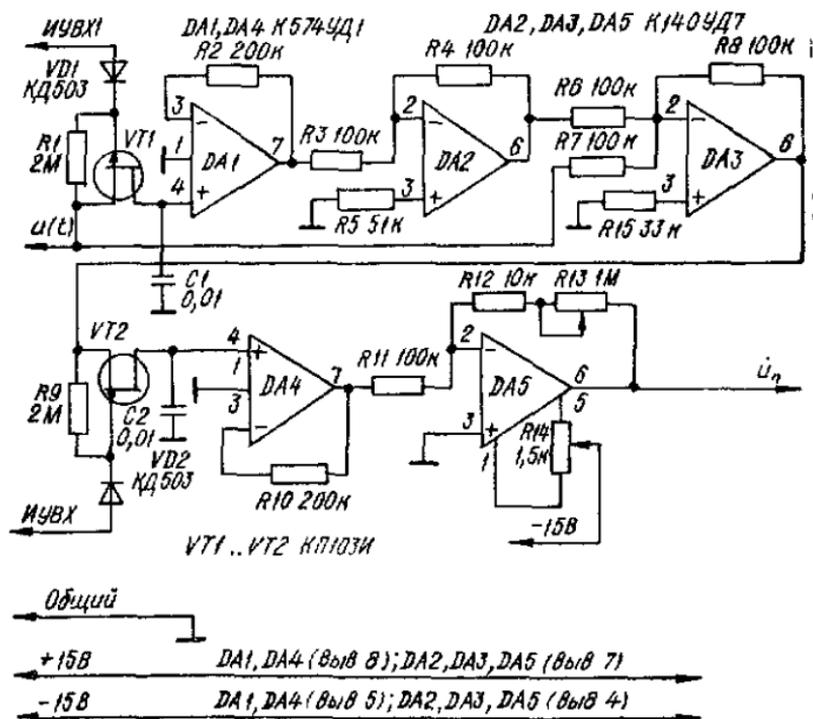
Входное воздействие $u(t)$ подается одновременно на вход $УВХ1$ (полевой транзистор VT1 типа КП103И, конденсатор $C1$, микросхема DA1 типа К574УД1) и на первый вход (резистор $R7$) сумматора (микросхема DA3 типа К140УД7).

В момент поступления импульса $ИУВХ1$ (рис. 3.21) производится выборка (запоминание) текущего значения входного воздействия. Запомненное значение входного воздействия u_n хранится в течение интервала измерения и с выхода $УВХ1$ (вывод 7 микросхемы DA1) через инвертор (микросхема DA2 типа К140УД7) поступает на второй (резистор $R6$) вход сумматора. На выходе сумматора (вывод 6 микросхемы DA3) формируется

напряжение $\Delta u_n = u(t) - u_n$, значение которого в конце интервала измерения пропорционально средней скорости изменения входного воздействия в данном интервале измерения. Оконча-



0



δ

Рис. 3 20

ние интервала измерения определяется моментом поступления импульса ИУВХ, под действием которого происходит выборка текущего значения напряжения Δu_n . Запомненное в УВХ (полевой транзистор VT2 типа КП103И, конденсатор C2) напряжение

Δu_n (рис. 3.21), пропорциональное средней скорости изменения входного воздействия на данном интервале измерения, хранится в течение следующего интервала и с выхода УВХ (вывод 7 микросхемы DA4) подается на вход масштабирующего усилителя (микросхема DA5 типа К140УД7). Масштабирующий усилитель обеспечивает требуемый масштаб напряжения u_n' , соответствующего скорости изменения входного воздействия σ_{n-1} .

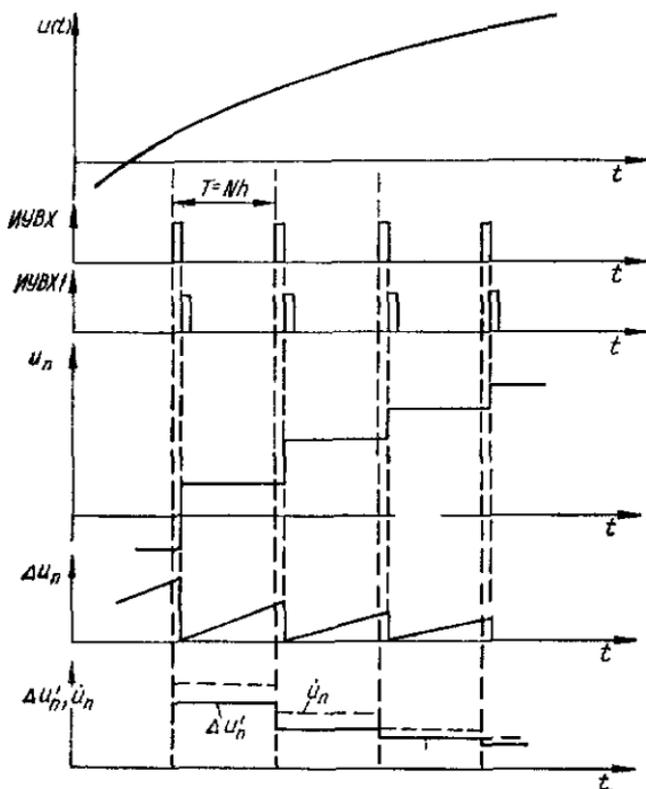


Рис. 3.21

Функциональная схема устройства, которое обеспечивает одновременно измерение средней за интервал измерения скорости изменения входного воздействия σ_{n-1} и приращения скорости $\Delta \sigma_{n-1}$, показана на рис. 3.22. Измеритель скорости σ_{n-1} и приращения скорости $\Delta \sigma_{n-1}$ состоит из трех устройств выборки и хранения (УВХ1, УВХ2, УВХ3) и электронного ключа Кл.

Принципиальная схема измерителя средней скорости и приращения средней скорости изображена на рис. 3.23, а эюры, поясняющие работу устройства, — на рис. 3.24.

Входное воздействие $u(t)$ подается одновременно на вход УВХ1 (первое устройство выборки и хранения собрано на полевом транзисторе VT1 типа КП103И, конденсаторе C1, микросхеме DA1 типа К574УД1) и на первый вход (резистор R7) первого сумматора (микросхема DA3 типа К140УД7). В момент поступ-

ления импульсы ИУВХ1 (рис. 3.24) производится выборка (запоминание) текущего значения входного воздействия. Запомненное напряжение u_n хранится в течение интервала измерения и с выхода УВХ1 (вывод 7 микросхемы DA1) через первый инвертор (микросхема DA2 типа К140УД7) поступает на второй вход (резистор R6) первого сумматора. На выходе первого сумматора (вывод 6 микросхемы DA3) формируется напряжение $\Delta u_n = u(t) - u_n$, значение которого в конце интервала измерения пропорционально средней скорости изменения входного воздействия в данном интервале измерения. Требуемый масштаб напряжения Δu_n устанавливается регулировкой коэффициента передачи первого сумматора переменным резистором R8. Выборка

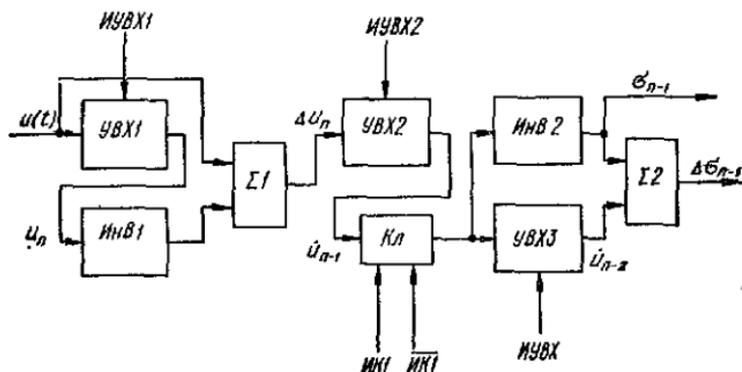
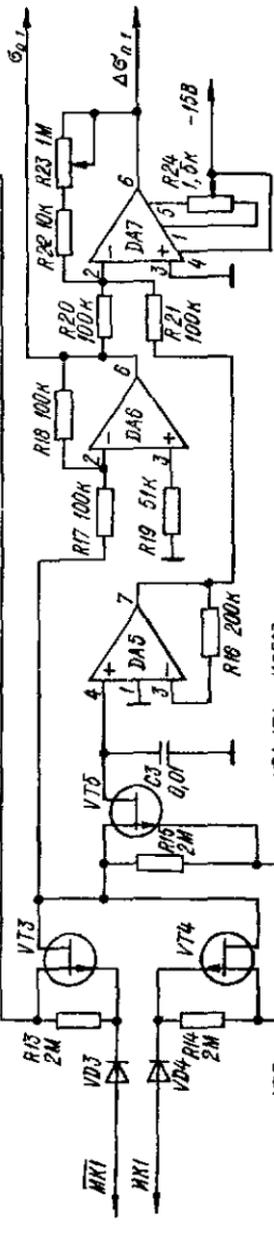
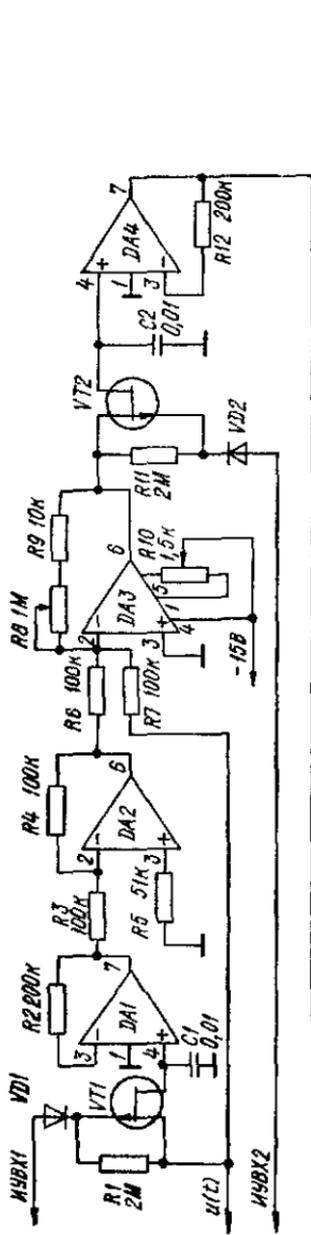


Рис. 3.22

значений напряжения Δu_n в конце каждого интервала измерения происходит под действием импульсов ИУВХ2. Запомненное в УВХ2 (второе устройство выборки и хранения) собрано на полевом транзисторе VT2 типа КП103И, конденсаторе C2, микросхеме DA4 типа К574УД1) напряжение u_{n-1} , пропорциональное средней скорости изменения входного воздействия на $(n - 1)$ -м интервале, хранится в течение следующего n -го интервала и с выхода УВХ2 (вывод 7 микросхемы DA4) подается на электронный ключ, собранный на транзисторах VT3, VT4 типа КП103И. Электронный ключ управляется поступающими с выхода ФИУ импульсами коммутации ИК1, ИК2 и служит для исключения прохождения на выход устройства напряжения u_{n-1} , равного величине начального скачка входного воздействия (если входное воздействие является непрерывной функцией времени, то электронный ключ можно исключить из схемы измерителя скорости). С выхода электронного ключа напряжение, пропорциональное средней скорости изменения входного воздействия, поступает на вход второго инвертора (микросхема DA6 типа К140УД7) и на вход УВХ3 (третье устройство выборки и хранения) выполнено на полевом транзисторе VT5, конденсаторе C3, микросхеме DA5 типа К574УД1). На выходе второго инвертора (вывод 6 микросхемы DA6) формируется напряжение σ_{n-1} , величина которого на данном интервале равна средней скорости изменения входного воздействия на предыдущем интервале. Это на-



- VD1, VD4 - КД503
- VT1, VT5 - КП103М
- DA1, DA4, DA5 - ИС74901
- DA2, DA3, DA6, DA7 - К1409Д7
- DA1, DA4, DA5 (Выб 6), DA2, DA3, DA6, DA7 (Выб 7)
- DA1, DA4, DA5 (Выб 5), DA2, DA3, DA6, DA7 (Выб 4)

Рис. 3.23

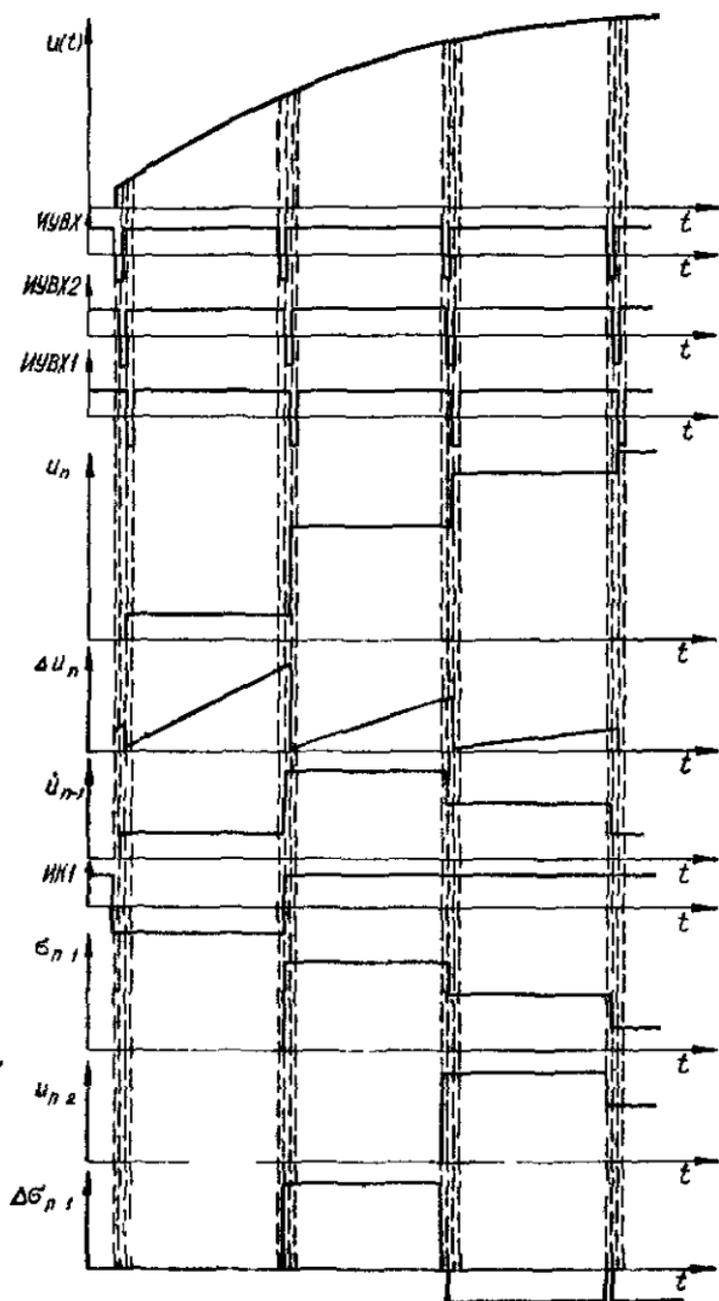


Рис 3 24

пряжение подается на выход устройства и на первый вход второго сумматора (микросхема DA7 типа K140УД7).

В УВХЗ под действием импульса ИУВХ производится выборка и хранение в течение текущего n -го интервала измерения напряжения, пропорционального скорости изменения входного воздействия на $(n - 2)$ -м интервале измерения. Запомненное в УВХЗ напряжение u_{n-2} с выхода УВХЗ (вывод 7 микросхемы DA5) подается на второй вход второго сумматора (резистор R21). На выходе второго сумматора (вывод 6 микросхемы DA7) формируется напряжение $\Delta\sigma_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \equiv \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}$, рав-

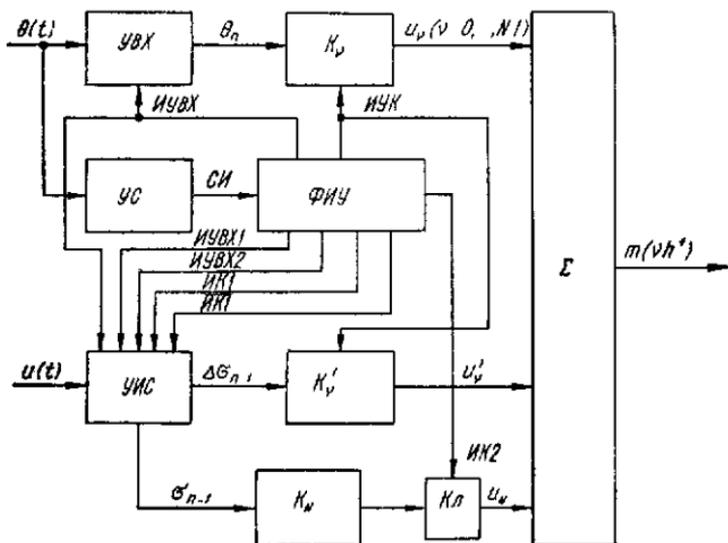


Рис. 3.25

ное приращению скорости изменения входного воздействия. Требуемый масштаб напряжения $\Delta\sigma_{n-1}$ устанавливается регулировкой коэффициента передачи второго сумматора резистором R23.

Функциональная схема регулятора, оптимального для линейно изменяющихся воздействий на входе системы и работающего в системе управления при произвольных воздействиях на входе системы, показана на рис. 3.25. Такой регулятор формирует в каждом интервале регулирования $T = Nh$ управляющие воздействия на входе объекта регулирования $m_v = u_v + u'_v = K_v U + K'_v \Delta\sigma$, $v = 0, 1, \dots, N - 1$, где N — порядок дифференциального уравнения, описывающего динамику линейного объекта регулирования, и, кроме того, для объектов с астатизмом первого порядка формирует «подставку» $m_N = u_N$, пропорциональную скорости входного воздействия, в конце интервала регулирования (эта «подставка» действует в следующем интервале регулирования). Например, для системы управления с объектом регулирования, математическая модель которого описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s + b)]^{-1}$, регулятор в каждом интервале $T = Nh$, $N = 2$, формирует на входе объекта управления два импульса [см. формулу (2.13)]:

$$m_0 = u_0 + u'_0 = K_0 U + K'_0 \Delta \sigma$$

$$\text{и } m_1 = u_1 + u'_1 = K_1 U + K'_1 \Delta \sigma,$$

где

$$K_0 = \frac{b}{\alpha h (1-R)}; K'_0 = K_0 \left(2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{1-B} \right);$$

$$K_1 = -\frac{bB}{\alpha h (1-B)}; K'_1 = K_1 \left[2h + \frac{1}{b} - \frac{h}{B(1-B)} \right];$$

$$U = \Theta_n; \Delta \sigma = \Delta \sigma_{n-1}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

«подставку»

$$m_N = u_N = \frac{b}{\alpha} \sigma, \nu \geq 2.$$

В состав регулятора (рис. 3 25) входят: устройство выборки и хранения УВХ; два устройства с переменными коэффициентами передачи соответственно K_ν и K'_ν (первое из них формирует управляющие воздействия на объект регулирования $u_\nu = K_\nu \Theta_n$, $\nu = 1, 2$, второе — управляющие воздействия $u'_\nu = K'_\nu \Delta \sigma_{n-1}$); масштабирующий усилитель с коэффициентом передачи K_N для формирования напряжения «подставки» $u_N = m_N$; устройство синхронизации УС, обеспечивающее формирование синхронизирующего импульса СИ при скачкообразном изменении входного воздействия; устройство измерения скорости и приращения скорости изменения входного воздействия УИС, электронный ключ Кл; формирователь импульсов управления ФИУ, обеспечивающий формирование всех сигналов, необходимых для правильной работы регулятора (импульсов управления основным устройством выборки и хранения ИУВХ, импульсов управления УВХ1 и УВХ2 в устройстве измерения скорости и приращения скорости изменения входного воздействия УИС — ИУВХ1, ИУВХ2, импульсов управления коммутаторами аналоговых сигналов в устройствах с переменным коэффициентом передачи ИУК, импульсов коммутации электронного ключа в устройстве УИС ИК1, ИК1, импульсов коммутации электронного ключа Кл — ИК2); сумматор Σ.

Принципиальные схемы устройства выборки и хранения УВХ, устройства синхронизации УС, устройств с переменными коэффициентами передачи K_ν и K'_ν и устройства измерения скорости и приращения скорости изменения входного воздействия УИС описаны выше и изображены соответственно на рис. 3.4, 3.5, 3.9 и 3.23

Формирователь импульсов управления ФИУ, входящий в состав рассматриваемого регулятора, отличается от рассмотренного выше ФИУ (см. рис. 3.11, 3.12), входящего в состав регулятора, оптимального для ступенчатого воздействия на входе системы, тем, что кроме импульсов управления ИУВХ и ИУК дополнительно формирует импульсы ИУВХ1, ИУВХ2, ИК1, ИК1, ИК2. Импульсы ИУВХ1, ИУВХ2, ИК1, ИК1 обеспечивают работу устройства измерения скорости и приращения скорости изменения входного воздействия, а импульс ИК2 управляет электронным ключом Кл, подключающим к выходу регулятора напряжение «подставки» u_N по окончании переходного процесса в

системе управления. Принципиальная схема той части формирователя импульсов управления *ФИУ*, которая обеспечивает формирование указанных дополнительных импульсов, изображена на рис. 3.26, а.

В состав дополнительной части формирователя импульсов управления *ФИУ* (рис. 3.26, а) входят: формирователь импульсов *ИУВХ2* (собирается на логическом элементе DD7.2 из состава микросхемы DD7 типа К561ЛН2 (см. рис. 3.12), транзисторе VT3 типа КТ315Г, транзисторе VT4 типа КТ361Г); формирователь импульсов *ИУВХ1* (собирается на логическом элементе DD7.3 из состава микросхемы DD7, транзисторе VT5 типа КТ315Г, транзисторе VT6 типа КТ361Г); формирователь импульсов коммутации *ИК1*, $\overline{ИК1}$, *ИК2* (собирается на двоичном счетчике — микросхема DD8 типа К176ИЕ2, дешифраторе — микросхема DD9 типа К176ИД1, логических элементах DD7.4 и DD10.1 и транзисторах VT7—VT12, из которых VT8 и VT11 типа КТ361Г, а остальные — типа КТ315Г).

Формирователи импульсов *ИУВХ1* и *ИУВХ2* собраны по идентичным схемам. На входную дифференцирующую цепь формирователя *ИУВХ2*, состоящую из конденсатора С4, резистора R9 и диода VD3 типа КД503, поступает импульс установки в нулевое состояние счетчика текущего номера шага регулирования *ИУО* (вывод 3 микросхемы DD2.1 — см. рис. 3.12), являющийся сигналом логической «1» и совпадающий во времени с импульсом *ИУВХ*. Вход логического элемента DD7.2 через резистор R9 постоянно подключен к напряжению питания микросхем, т. е. к уровню логической «1» (вывод +9 В на рис. 3.12). Поэтому отрицательный перепад продифференцированного импульса формирует на входе DD7.2 уровень логического «0», а на выходе DD7.2 — сигнал логической «1», начало которого совпадает с окончанием импульса *ИУВХ*, а длительность определяется параметрами дифференцирующей цепи. С выхода логического элемента DD7.2 сформированный сигнал поступает на ключевые усилители, собранные на транзисторах VT3, VT4, которые обеспечивают формирование импульса *ИУВХ2* отрицательной полярности с размахом от +15 до -15 В. На входную дифференцирующую цепь формирователя *ИУВХ1*, состоящую из конденсатора С5, резистора R14 и диода VD4 типа КД503, поступает сигнал логической «1» с выхода логического элемента DD7.2. На выходе этого формирователя (коллектор транзистора VT6) формируется импульс *ИУВХ1*, начало которого совпадает с окончанием импульса *ИУВХ2*. Это значит, что импульсы управления устройствами выборки и хранения во времени распределены следующим образом (см. рис. 3.24): первым следует *ИУВХ*, вторым — *ИУВХ2*, третьим — *ИУВХ1*, причем начало последующего импульса совпадает с концом предыдущего.

Рассмотрим работу формирователя импульсов $\overline{ИК1}$, $\overline{ИК1}$ и *ИК2*. Длительность импульсов коммутации *ИК1* и $\overline{ИК1}$, предназначенных для управления электронным ключом Кл в измерителе средней скорости и приращения скорости *УИС*, равна интервалу регулирования $T = Nh$, полярность импульса *ИК1* отрицательная, $\overline{ИК1}$ положительная при размахе импульсов от +15 до -15 В. Импульс *ИК2*, управляющий электронным ключом Кл на выходе масштабирующего усилителя (рис. 3.25), имеет длительность 2T, положительную полярность и размах от +15 до -15 В. Начало этих импульсов определяется момен-

том поступления синхронизирующего импульса *СИ*. Импульс *СИ*, формируемый устройством синхронизации *УС* при скачкообразном воздействии на входе системы регулирования и совпадающий во времени с импульсом *ИУВХ*, устанавливает в нулевое состояние счетчик числа интервалов регулирования, собранный на микросхеме *DD8*. При этом на выходе «0» дешифратора (вывод 3 микросхемы *DD9*) устанавливается уровень логической «1», а на остальных выводах дешифратора — уровни логического «0». Это приводит к тому, что на входе «V» счетчика (вывод 3 микросхемы *DD8*) устанавливается уровень логической «1», разрешающий счет импульсов, поступающих на вход счетчика (вывод 2 микросхемы *DD8*) с выхода логического элемента *DD7.2* (эти импульсы во времени совпадают с импульсами *ИУВХ2*). Уровень логической «1», установившийся на выходе «0» дешифратора в момент поступления импульса *СИ*, подается на первый вход логического элемента *ИЛИ—НЕ*, на выходе которого (вывод 3 микросхемы *DD10.1*) устанавливается уровень логического «0», поступающий далее на ключевые усилители, собранные на транзисторах *VT7...VT9*. При этом на коллекторе транзистора *VT9* устанавливается напряжение —15 В, соответствующее импульсу *ИК1*, а на коллекторе транзистора *VT8* — напряжение +15 В, соответствующее импульсу *ИК1*.

Аналогичным образом с момента установления на выходе «3» дешифратора (вывод 15 микросхемы *DD9*) уровня логического «0» начинает формироваться импульс *ИК2* положительной полярности (на коллекторе транзистора *VT12* устанавливается напряжение +15 В).

Первый импульс с выхода логического элемента *DD7.2* на вход счетчика поступает сразу после окончания импульса *СИ* и сдвигает уровень логической «1» с выхода «0» дешифратора на выход «1» (вывод 14 микросхемы *DD9*), что не изменяет состояния выходов ключевых усилителей (напряжений на коллекторах транзисторов *VT8*, *VT9* и *VT12*). Второй импульс с выхода логического элемента *DD7.2*, поступающий на вход счетчика через интервал *T* после первого импульса, сдвигает уровень логической «1» с выхода «1» дешифратора на выход «2» (вывод 2 микросхемы *DD9*), что приводит к тому, что на обоих входах логического элемента *ИЛИ—НЕ* (микросхема *DD10.1*) устанавливается уровень логического «0», а на его выходе — уровень логической «1». Этот момент соответствует окончанию импульсов *ИК1* и *ИК1*, так как напряжение на коллекторах транзисторов *VT8* и *VT9* изменяют свою полярность на противоположную: на коллекторе *VT8* устанавливается напряжение —15 В, на коллекторе *VT9* — +15 В. Такое состояние сохраняется до поступления очередного синхронизирующего импульса *СИ*.

Импульс *ИК2* заканчивается в момент поступления с выхода логического элемента *DD7.2* третьего импульса на вход счетчика в конце второго интервала регулирования, под действием которого уровень логической «1» сдвигается с выхода «2» дешифратора на выход «3» (вывод 15 микросхемы *DD9*). При этом на выходе логического элемента *НЕ* (вывод 8 микросхемы *DD7.4*) устанавливается уровень логического «0», запрещающий дальнейший счет импульсов, а на коллекторе транзистора *VT12* устанавливается напряжение —15 В.

Электронный ключ *Кл*, изображенный на функциональной схеме регулятора (рис. 3.25), выполнен на полевом транзисторе типа *КП103И*, как в схеме *УВХ* на рис. 3.4. Масштабирующий

усилитель с коэффициентом передачи K_N представляет собой инвертирующий операционный усилитель на микросхеме типа К140УД7.

Принципиальная схема сумматора Σ показана на рис. 3.26, б. Сумматор выполнен на инвертирующем операционном усилителе (микросхема DA1 типа К140УД7). Переменный резистор R_5 в цепи отрицательной обратной связи обеспечивает установку требуемых масштабов коэффициентов K_v или K'_v .

Рассмотрим работу регулятора, функциональная схема которого изображена на рис. 3.25, в системе управления на рис. 3.1 или на рис. 2.8. Пусть объект регулирования описывается передаточной функцией $G(s) = \alpha [s(s+b)]^{-1}$, а на вход системы поступает произвольное воздействие $u(t)$, имеющее начальный скачок величины U_0 . При поступлении начального скачка устройство синхронизации УС формирует синхронизирующий импульс СИ. Этот импульс является импульсом запуска для формирователя импульсов управления ФИУ. Формируемые импульсы управления и коммутации в описанной последовательности подаются от блока ФИУ на все другие блоки регулятора, и регулятор включается в работу. Эпюры, поясняющие работу регулятора, изображены на рис. 3.27.

На первом интервале регулирования $0 < t \leq T$, $T = Nh$, $N = 2$, информация о скорости и приращении скорости отсутствует ($\sigma = 0$, $\Delta\sigma = 0$), на выходе УВХ имеется запомненное значение ошибки системы $\Theta(0)$, равное значению начального скачка входного воздействия U_0 . Устройство с переменным коэффициентом передачи K_v обеспечивает формирование управляющих воздействий на объект регулирования $m_0 = K_0 U_0$ и $m_1 = K_1 U_0$. Система обрабатывает входное воздействие с ошибкой, равной в конце интервала $\Theta(T) = u(T) - x(T) = u(T) - u(0) = u(T) - U_0$. На втором интервале регулирования $T < t \leq 2T$ с выхода измерителя скорости и приращения скорости выдается информация о средней скорости и на первом интервале σ_0 , а $\Delta\sigma_0 = \sigma_0$, на выходе УВХ имеется запомненное значение ошибки $\Theta(T) = u(T) - U_0$. Устройства с переменными коэффициентами передачи K_v и K'_v обеспечивают формирование управляющих воздействий на объект регулирования $m_0 = K_0 \Theta(T) + K'_0 \sigma_0$; $m_1 = K_1 \Theta(T) + K'_1 \sigma_0$. Система обрабатывает входное воздействие с ошибкой, равной в конце интервала $\Theta(2T) = u(2T) - u(T) - \sigma_0 T$.

К концу второго интервала регулирования переходный процесс в системе заканчивается и система переходит в режим слежения за изменяющимся входным воздействием. При этом в каждом интервале регулирования $nT < t \leq (n+1)T$, $n \geq 2$, регулятор формирует два импульса

$$\begin{aligned} m_0 &= u_0 + u'_0 = K_0 \Theta(nT) + K'_0 \Delta\sigma_{n-1}; \\ m_1 &= u_1 + u'_1 = K_1 \Theta(nT) + K'_1 \Delta\sigma_{n-1}, \end{aligned}$$

которые подаются на вход объекта регулирования вместе с «подставкой» $m_N = u_N = b\sigma_{n-1}/\alpha$, пропорциональной скорости входного воздействия на предыдущем интервале.

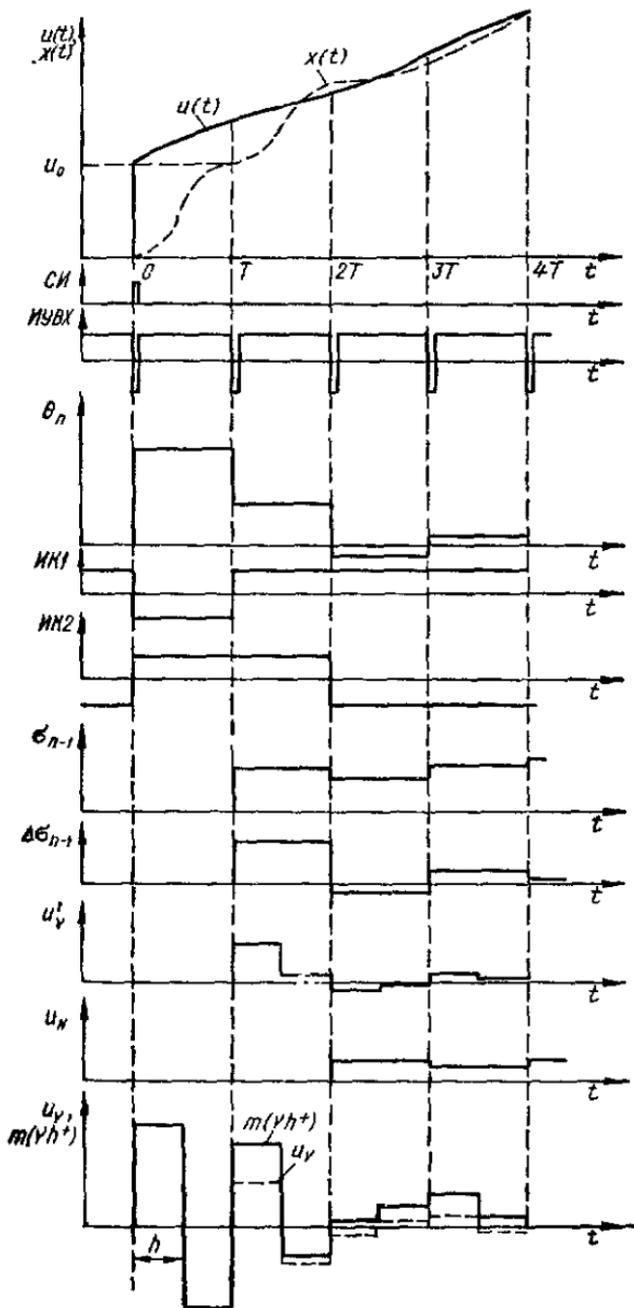


Рис. 3.27

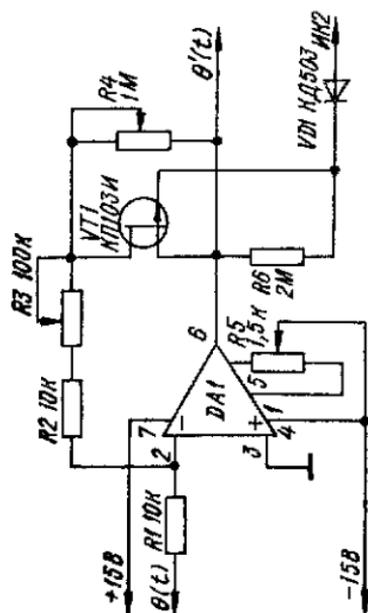
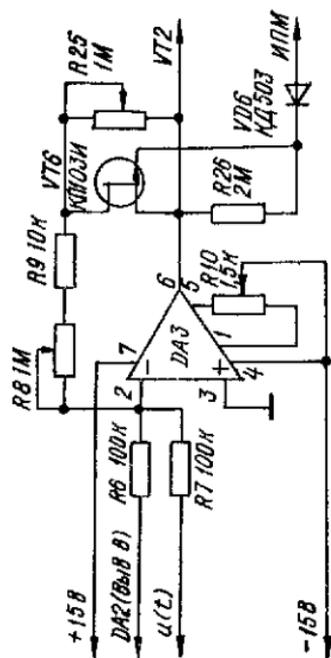
квантования, построенного по принципу оптимального для линейно изменяющихся воздействий регулятора, показана на рис. 3.28. Эта схема отличается от схемы на рис. 3.25 следующими дополнительными элементами: регулируемым усилителем PY , дополнительным каналом формирования управляющих воздействий u_{v2} и u'_{v2} , состоящим из двух устройств с переменными коэффициентами передачи K_{v2} и K'_{v2} , и электронными ключами $Kл1 \dots Kл4$.

Регулируемый усилитель предназначен для увеличения общего коэффициента усиления при переходе к меньшему шагу квантования. Усилитель (рис. 3.29, а) выполнен на инвертирующем операционном усилителе (микросхема DA1 типа К140УД7), коэффициент усиления которого изменяется скачком при помощи электронного ключа (на полевом транзисторе VT1 типа КП103И), управляемого импульсом коммутации ИК2. При работе регулятора с шагом h_1 электронный ключ замкнут и коэффициент усиления равен $(R_2 + R_3)/R_1$; при работе регулятора с шагом h_2 электронный ключ разомкнут и коэффициент усиления усилителя равен $(R_2 + R_3 + R_4)/R_1$.

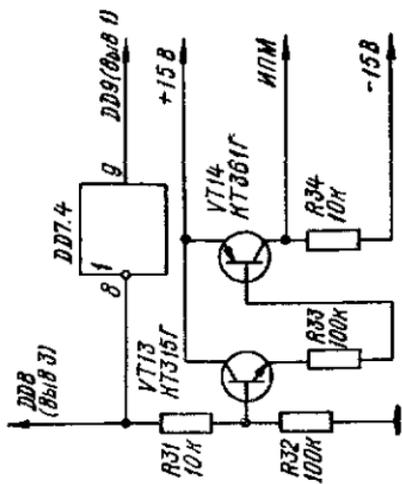
Устройства с переменными коэффициентами передачи K_{v1} , K'_{v1} и K_{v2} , K'_{v2} выполнены по схеме на рис. 3.7 (или по схеме рис. 3.9) и отличаются только значениями устанавливаемых коэффициентов передачи и шагом квантования. Электронные ключи $Kл1 \dots Kл4$ выполнены по обычной схеме (рис. 3.29, а, б, в) на полевых транзисторах типа КП103И и управляются импульсами коммутаций ИК2, ИК2' так, что при работе регулятора с шагом h_1 ко входам сумматора Σ (рис. 3.28) подключены выходы устройств с переменными коэффициентами передачи K_{v1} , K'_{v1} , а при работе регулятора с шагом h_2 — выходы устройств с переменными коэффициентами передачи K_{v2} , K'_{v2} . Устройство выборки и хранения УВХ и устройство синхронизации УС выполнены соответственно по схемам на рис. 3.4 и 3.5, сумматор Σ — по схеме на рис. 3.26, б.

Принципиальная схема устройства измерения скорости и приращения скорости изменения входного воздействия УИС, используемая в схеме на рис. 3.28, имеет небольшое отличие от схемы на рис. 3.23: вместо сумматора $\Sigma 1$ (см. схемы на рис. 3.22 и 3.23) с постоянным коэффициентом передачи введен сумматор с переменным коэффициентом передачи. Принципиальная схема этого сумматора показана на рис. 3.29, б. Коэффициент передачи сумматора изменяется импульсом переключения масштаба ИПМ. Этот импульс открывает электронный ключ (на полевом транзисторе VT6 типа КП103И) в режиме работы регулятора с шагом h_1 и первого цикла работы регулятора с шагом h_2 . По окончании первого цикла работы регулятора с шагом h_2 ключ размыкается и коэффициент передачи сумматора увеличивается так, чтобы обеспечивалось постоянство масштаба напряжения, пропорционального скорости изменения входного воздействия при уменьшении длительности интервала измерения скорости.

Принципиальная схема формирователя импульсов управления ФИУ также немного отличается от схем, изображенных на рис. 3.12 и 3.26, а. Во-первых, генератор тактовых импульсов выполнен так, что частота импульсов скачкообразно изменяется путем соответствующей коммутации. Во-вторых, в схеме ФИУ имеется дополнительный каскад формирования импульса переключения масштаба.



б



в

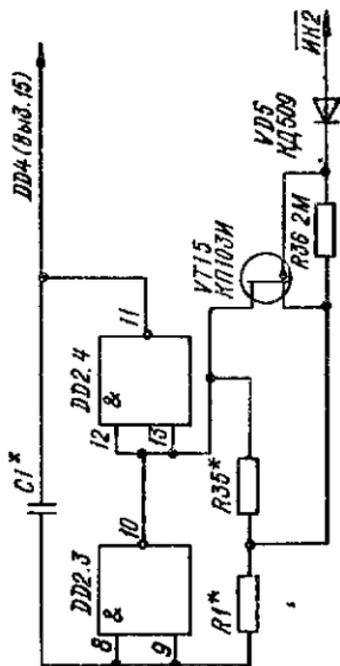


Рис. 3.29

Принципиальная схема генератора тактовых импульсов с изменяемой частотой следования изображена на рис. 3.29, в. Электронный ключ (на полевом транзисторе $VT15$ типа КП103И), включенный параллельно с резистором $R35^*$, управляется импульсом $ИК2$. Начало этого импульса совпадает с моментом

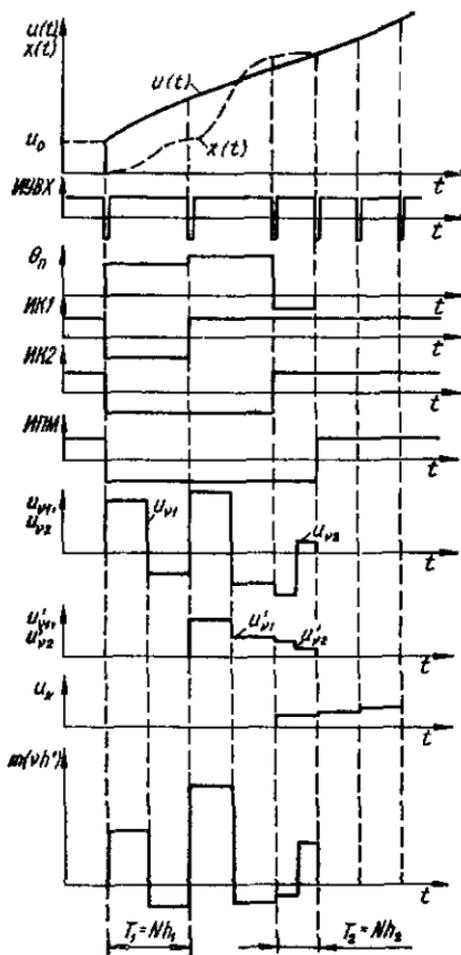


Рис. 3.30

построены на рис. 3.30. В течение первых двух циклов регулирования длительностью $T_1 = 2h_1$, регулятор с переменным шагом квантования (рис. 3.28) работает точно так же, как и рассмотренный выше регулятор с постоянным шагом квантования (см. рис. 3.25). По окончании переходного процесса импульс $ИК2$ изменяет свою полярность на противоположную, ключ на транзисторе $VT15$ в генераторе тактовых импульсов (рис. 3.29, в) замыкается, что приводит к увеличению частоты тактовых импульсов и уменьшению длительности шага квантования. Одновременно происходит коммутация ключей $Кл1.. Кл4$

сопровождения скачкообразного входного воздействия, а полярность его такова, что во время переходного процесса ключ разомкнут и частота генератора, а значит, и длительность шага h_1 определяются резисторами $R1^*$ и $R35^*$. По окончании переходного процесса импульс $ИК2$ изменяет полярность на противоположную, ключ замыкается и частота генератора скачком увеличивается до величины, соответствующей шагу h_2 (частота генератора в этом режиме определяется величиной резистора $R1^*$).

Принципиальная схема формирователя импульса переключения масштаба $ИГМ$ показана на рис. 3.29, г. Формирователь подключается к выходу инвертора (микросхема DD7.4) в схеме на рис. 3.26, а, а вход инвертора подключается к выходу «4» дешифратора (вывод 1 микросхемы DD9).

Экюры, поясняющие работу регулятора с переменным шагом квантования в системе на рис. 3.1 с объектом регулирования второго порядка,

(см. рис. 3.28), а также изменение коэффициентов передачи регулируемого усилителя PY (рис. 3.29, а) и сумматора (рис. 3.29, б) в схеме УИС, что обеспечивает дальнейшую работу регулятора с шагом $h_2 < h_1$.

3.5. ПОСТРОЕНИЕ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА МИКРОПРОЦЕССОРАХ

Современная элементная база цифровой техники открывает широкие возможности построения цифровых регуляторов с программной реализацией операций в реальном времени на основе микропроцессоров (МП). Микропроцессор — автономное функционально законченное устройство, состоящее из одной или нескольких программно-управляемых БИС, включающее все средства, необходимые для обработки информации и управления данными, и рассчитанное на совместную работу с устройствами памяти и ввода-вывода информации. Структура МП должна удовлетворять трем основным требованиям: 1) быть функционально гибкой; 2) обеспечивать высокое быстродействие; 3) иметь недорогую технологическую реализацию.

Задача программной реализации цифровых регуляторов, в первую очередь, предполагает выбор микропроцессорного набора (МН). Для оценки возможных вариантов программной реализации регуляторов для разных МН составляют программы, реализующие алгоритм обработки, и рассчитывают время выполнения алгоритма. Варианты, удовлетворяющие заданным требованиям по времени вычисления, сравнивают по критерию предпочтения и на основании этого выбирают лучший.

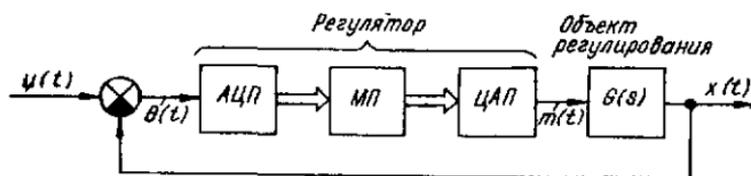
В режиме работы в реальном времени (без накопления входных отсчетов) период следования выходных отсчетов равен периоду дискретизации входного сигнала. Поскольку микропроцессор последовательно выполняет операции приема, обработки и выдачи информации, частота дискретизации входного сигнала должна удовлетворять условию $f_d < (T_{пр} + T_{обр} + T_{выд})^{-1}$, где в скобках указано время приема, обработки и выдачи информации. Если ни один из типов МН не обеспечивает требуемого периода следования выходных отсчетов, цифровой регулятор выполняют на базе микропроцессорных систем, в которых процессоры включаются последовательно, параллельно или комбинируемо.

По сравнению с аппаратно реализованными цифровыми регуляторами регуляторы с программной реализацией являются менее быстродействующими, но более универсальными, легко перестраиваемыми и имеют лучшие массо-габаритные характеристики.

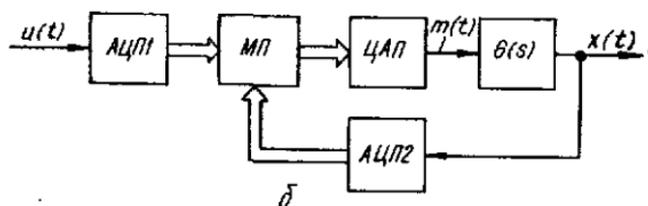
Типовая структура одноконтурной системы управления с микропроцессором показана на рис. 3.31, а. Регулятор в системе на рис. 3.31, а состоит из аналого-цифрового преобразователя АЦП, микропроцессора МП и цифроаналогового преобразователя ЦАП. Следует иметь в виду, что система на рис. 3.31, а имеет два дополнительных ограничения, связанных с применением микропроцессора: 1) конечная скорость выполнения арифметических операций в микропроцессоре и возникающие при этом временные задержки сигнала в контуре управления; 2) квантование сигнала по уровню (например, при длине слова в 8 бит микропроцессор обеспечивает $2^8 = 256$ уровней разрешения).

Дополнительные ограничения также связаны с применением АЦП и ЦАП. Указанные ограничения необходимо учитывать при исследовании качества работы и устойчивости системы на рис. 3.31, а.

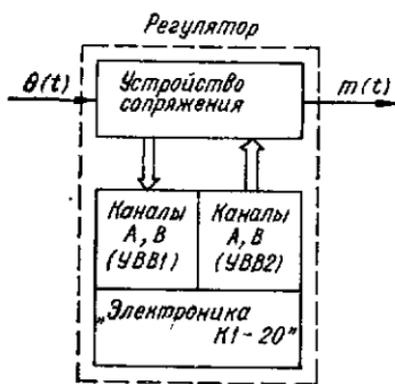
На микропроцессоре можно не только реализовать все рассмотренные структуры регуляторов с равномерным и неравно-



а



б



в

Рис. 3.31

мерным, постоянным и переменным шагом квантования, с постоянными и зависимыми от скорости входного воздействия коэффициентами, но и возложить на микропроцессор дополнительную функцию элемента сравнения (рис. 3.31, б), переключателя режимов работы системы, самонастройки и др.

Рассмотрим построение цифровых регуляторов на МП среднего быстродействия серии К580.

Устройства сопряжения МП с непрерывной частью системы управления. Такими внешними устройствами по отношению к микропроцессору являются цифроаналоговые и аналого-цифровые преобразователи (ЦАП и АЦП). Цифроаналоговый преобразователь — функциональный узел, однозначно преобразующий кодовые комбинации цифрового сигнала в значения анало-

гового сигнала. Аналого-цифровой преобразователь решает задачу поиска однозначного соответствия аналоговому сигналу цифрового кода. В настоящее время отечественной промышленностью освоено достаточное количество типов БИС ЦАП и АЦП [1; 2; 30].

Одно из основных требований к АЦП и ЦАП заключается в возможности их сопряжения с МП, что предполагает совместимость логических уровней цифровых сигналов преобразователей и шины данных микропроцессора, совпадение видов цифровых кодов и формата данных, программную совместимость.

Для сопряжения микропроцессора серии К580 с непрерывной частью системы управления можно успешно применять преобразователи серии К572. Наличие в этой серии 12-разрядных АЦП и ЦАП дает возможность при необходимости наращивать разрядность входных и выходных данных с минимальными доработками устройства сопряжения.

Принципиальная схема устройства сопряжения (УС) микропроцессора серии К580 с непрерывной частью системы управления показана на рис. 3.32. Это устройство обеспечивает обмен данными между микропроцессором и входным и выходным преобразователями без прерывания программы. Устройство имеет следующие характеристики: диапазон входных аналоговых сигналов 0...4 В; диапазон выходных аналоговых сигналов ± 12 В; время преобразования (присма) информации в АЦП $T_{\text{пр}} = 120$ мкс; время установления (выдачи) информации ЦАП $T_{\text{выд}} = 15$ мкс; шаг квантования АЦП $\Delta_{\text{АЦП}} = 10^{-3}$ В; разрешающую способность ЦАП $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$ В.

Основными узлами устройства являются 12-разрядные АЦП и ЦАП, реализованные на базе микросхем К572ПВ1 и К572ПА2 соответственно. Кроме БИС АЦП и ЦАП, устройство содержит генератор тактовых импульсов (микросхема DD1 типа К155ЛАЗ), который формирует последовательность импульсов с максимальной частотой 250 кГц и скважностью 50% для обеспечения работы цифровой части микросхемы К572ПВ1, генератор импульсов синхронизации (микросхема DD2 типа К155ИЕ8), который является делителем частоты повторения тактирующих импульсов на 32, обеспечивает синхронизацию АЦП и управляет записью выходной информации микропроцессора во входные регистры (RG1 и RG2) ЦАП, прецизионный компаратор (микросхема DA3 типа К521СА3) для формирования логического сигнала (амплитудой не менее 10 В), которым останавливается процесс преобразования в АЦП. В устройство также входят источники питания (на микросхемах DA1 и DA4 типа К140УД7), которые обеспечивают заданные уровни опорных напряжений для БИС АЦП и ЦАП, сумматоры (на микросхемах DA2 и DA6 типа 544УД2 и К140УД20 соответственно) для суммирования выходных токов ЦАП (микросхема К572ПВ1 имеет внутренний ЦАП в цепи отрицательной обратной связи), масштабирующий усилитель (микросхема DA5 типа К140УД7) для обеспечения требуемого уровня выходных сигналов цифрового регулятора.

Микросхема ЦАП К572ПА2 включена по схеме четырехкватратного перемножителя и обеспечивает формирование биполярного выходного сигнала. Для работы ЦАП в этом режиме с дополнительным двоичным кодом в устройстве используется инвертор знакового разряда (микросхема DD3.1 типа К155ЛАЗ).

Программная реализация цифрового регулятора на базе микропроцессорного набора серии К580. Программирование микропроцессора серии К580 осуществляется на языке Ассемблера и подробно описано в работах [34; 44]. Преобразование программы в машинные коды, ее отладку, оптимизацию и документирование можно осуществить, например, с помощью микропроцессорной системы МСО 401 («Электроника К1-10»), а также с использованием программы МОНИТОР программируемого универсального контроллера «Электроника К1-20», на базе которого реализуется цифровой регулятор. Схема регулятора изображена на рис. 3.31, а. Организация обмена данными микропроцессора и устройства сопряжения (рис. 3.32) осуществляется с помощью двух микросхем К580ИК55, входящих в состав МН серии К580 и представляющих собой однокристалльные программируемые устройства ввода-вывода (УВВ) параллельной информации различного формата.

Для ввода в микропроцессор цифрового кода с выхода АЦП первое устройство ввода-вывода УВВ1 программируется на стробируемый ввод, соответствующий режиму 1 работы микросхемы К580ИК55. Импульсы стробирования вырабатываются АЦП после окончания преобразования аналогового сигнала (сигнал «конец преобразования», вывод 26 микросхемы К572ПВ1). При записи в регистр управляющего слова (РУС) микросхемы К580ИК55 операнда *BFH* на ввод в режиме 1 настроены каналы (порты) *A* и *B* этой микросхемы.

Для выдачи отсчетов выходного сигнала цифрового регулятора на ЦАП второе устройство ввода-вывода УВВ2 программируется на работу в режиме «0» (простой вывод). При записи в РУС этой микросхемы операнда 88Н на вывод информации настроены каналы *A*, *B* и четыре младших разряда канала *C*. Считывание информации с регистров каналов *A* и *B* и ее запись во входной регистр АЦП осуществляется синхронизирующими импульсами устройства сопряжения, длительность которых не превышает 5 мкс.

Рассмотрим кратко работу регулятора на рис. 3.31, а. С поступлением напряжения ошибки на инвертирующий вход компаратора (рис. 3.32) начинается процесс преобразования его в цифровой код. Как только напряжение, снимаемое с выходного ОУ АЦП, станет равным напряжению ошибки, на выходе компаратора устанавливается напряжение логического «0», которое останавливает процесс преобразования в АЦП. При этом на цифровых выходах АЦП устанавливается двоичный код ошибки системы, который с появлением импульса «конец преобразования» записывается в регистр канала *A* первого устройства ввода-вывода УВВ1, запрограммированного на стробируемый ввод информации с АЦП. В течение времени ожидания МП постоянно опрашивает регистр канала (порта) *A*. Как только произошла запись кода ошибки в регистр канала *A* и величина этого кода превысила порог ложного срабатывания, МП переходит к выполнению записанной в нем программы работы цифрового регулятора.

После окончания каждого цикла расчета результат последней операции передается в порты *A* и *B* устройства ввода-вывода УВВ2 (старший байт результата — в регистр канала *B*, младший — в регистр канала *A*), запрограммированного на простой вывод информации. С частотой повторения импульсов синхронизации старше 12 разрядов результата расчета в каждом цикле,

кранимого в регистрах портов *A* и *B*, одновременно считываются во входные регистры ЦАП, который осуществляет преобразование кода в аналоговый сигнал. При этом величина выходного сигнала регулятора остается неизменной до тех пор, пока не произойдет смена информации в регистрах портов *A* и *B* второго устройства ввода-вывода *УВВ2*.

Глава 4

УСТРОЙСТВА ПРЯМОГО ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУХФАЗНЫМИ АСИНХРОННЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

4.1. ОСОБЕННОСТИ ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУХФАЗНЫМ АСИНХРОННЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

В качестве объектов регулирования цифровых систем автоматического управления (САУ) широко применяют асинхронные двигатели (АД), которые по сравнению с двигателями постоянного тока имеют следующие преимущества: отсутствие подвижных электрических контактов, что обеспечивает высокую надежность и простоту эксплуатации; при одной и той же мощности и номинальной угловой скорости АД в 1,5—2 раза легче, а момент инерции ротора более чем в 2 раза меньше; в переходном режиме АД может развивать существенно большие моменты, что обеспечивает САУ высокое быстродействие с малыми потерями энергии, а в установившемся режиме — плавное, широкое и экономичное регулирование скорости.

При импульсном управлении питание статорных обмоток двухфазного асинхронного двигателя (ДАД) осуществляется импульсами несинусоидальной формы переменной полярности, частота изменения которых определяет частоту, а длительность полупериодов — амплитуду основной гармоники приложенного напряжения.

Схемы импульсного управления можно реализовать на тиристорных усилительно-преобразующих устройствах (УПУ). Изменяя угол включения тиристоров в каждом полупериоде напряжения питания, можно одновременно с амплитудой выходного напряжения изменять его форму, приближая ее к синусоидальной. Тиристорные УПУ применяют в электроприводах большой мощности.

Расширение производства высоковольтных силовых транзисторов привело к тому, что в настоящее время более широко применяют транзисторные усилители. Такие ключевые усилители обладают высоким КПД, термостабильны, имеют малое выходное сопротивление, что позволяет получать механические характеристики, аналогичные характеристикам при питании АД от источника бесконечно большой мощности. Так как в ключевых усилителях транзистор скачкообразно переходит из режима отсечки в режим насыщения, эти усилители при питании от источника постоянного напряжения могут формировать только прямоугольные импульсы, а управление ими требует специальных схем, выполняемых обычно на цифровых ИМС. При этом на выходе ключевых усилителей в обмотках возбуждения и управления ДАД получают импульсы прямоугольной формы

(рис. 4.1), а импульсное регулирование скоростью и моментом ДАД возможно изменением длительности импульсов (2γ), частоты их следования (ω) и фазового сдвига (Ψ) фазных напряжений. Момент и частота вращения АД определяются амплитудой и частотой первых гармоник фазных напряжений.

Импульсное управление асинхронным двигателем имеет следующие особенности [15]. Во-первых, при импульсном управлении АД как машина переменного тока работает от несинусоидальных по форме фазных напряжений и токов, содержащих в общем случае все нечетные гармоники; во-вторых, наличие в напряжении питания гармоник, отличных от основной, вызывает увеличение энергетических потерь, уменьшение момента на валу двигателя, пульсации вращающегося момента и скорости;

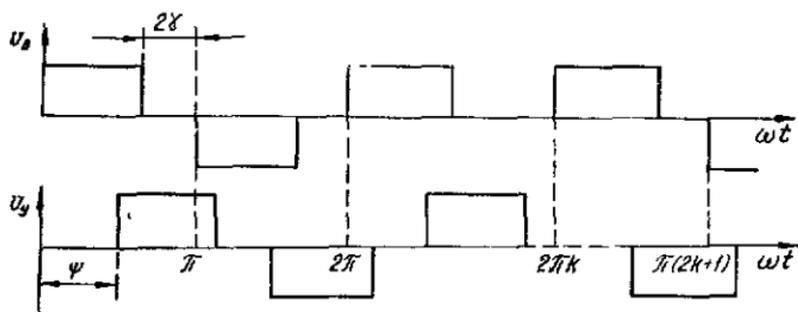


Рис. 4.1

в-третьих, несинусоидальная форма фазных напряжений и токов затрудняет применение аналитических методов для исследования статических и динамических режимов АД.

Появление дискретного электропривода с ДАД обусловлено широким применением средств цифровой техники, а также успехами в полупроводниковой усилительной технике. Основные его преимущества — простота и гибкость системы управления, бесконтактность двигателя, отсутствие настройки параметров привода, быстрая переналадка режимов работы и непосредственная связь с ЭВМ, минуя промежуточные цифроаналоговые преобразователи.

Схема устройства цифрового управления двухфазным асинхронным двигателем показана на рис. 4.2, в которой ФИД — формирователи интервалов дискретности частоты (f), длительности (t), фазы (Ψ). В схеме цифрового управления ДАД можно выделить две основные части: управляющую (слаботочную) и силовую (энергетическую). На конструктивное выполнение устройства цифрового управления влияют следующие факторы: мощность двигателя как объекта регулирования; источник напряжения, энергия которого расходуется для питания двигателя; метод цифрового управления; режим питания (симметричный или несимметричный) двигателя, а также число каналов управления, элементная база и уровень ее интеграции.

Схемы цифрового управления тиристорами широко описаны [39], поэтому в дальнейшем не рассматриваются. Независимо от реализации силовой части, управляющую часть можно выполнить как схемно, так и программно. На рис. 4.2 показана схемная реализация управляющей части, основным назначением ко-

торой является преобразование суммарного сигнала регулирования, заданного в цифровом коде, в последовательность импульсов управления силовой частью. Составляющими суммарного сигнала регулирования являются сигналы управления длительностью (N_d), частотой следования (N_f) импульсов фазных напряжений, их фазовым сдвигом (N_ψ). Поскольку выбрано цифровое управление, то необходимо определить интервал дискретности, в соответствии с которым осуществляется регулирование переменными, например частотой. Этот интервал дискретности формируется с помощью ФИД из общей тактовой системы импульсов, вырабатываемых генератором тактовых импульсов ГТИ. Технической базой ФИД могут быть делители частоты с фиксированным коэффициентом деления, определяющим цену дискреты переменной.

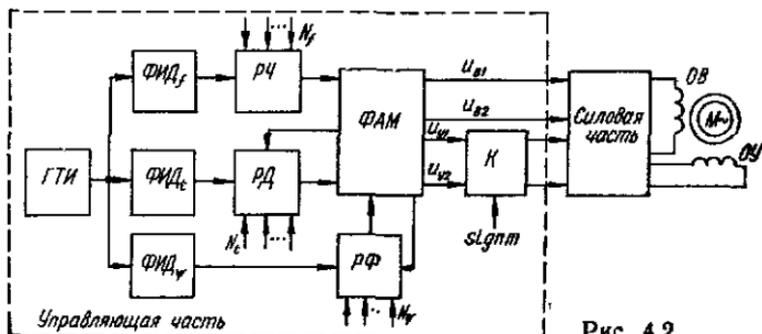


Рис. 4.2

Информация о задаваемом значении переменной вносится в дальнейшем в импульсную последовательность в помощью регуляторов, представляемых, как правило, управляемыми делителями частоты. Коэффициент деления последних изменяется в соответствии с кодом сигнала управления во всем диапазоне регулирования. С выходов регуляторов частоты PЧ, длительности PД и фазового сдвига PФ импульсов фазных напряжений импульсные последовательности управляют работой формирователя алгоритма модуляции ФАМ. Начало цикла формирования управляющих импульсов с помощью ФАМ синхронизовано с моментом поступления импульса регулятора частоты, а длительность управляющих импульсов зависит от времени накопления импульсной последовательности с выхода регулятора длительности. Каждый ключ силовой части управляется своей последовательностью управляющих импульсов и может находиться в проводящем состоянии в течение полупериода фазового напряжения. Следовательно, подключение двухфазной системы разнополярных импульсов (рис. 4.1) к обмоткам асинхронного двигателя возможно с помощью четырех полностью управляемых силовых ключей. Выходное импульсное напряжение силовой части непосредственно запитывает обмотки статора АД.

Очередность следования управляющих импульсов $u_{с1}$ и $u_{с2}$ можно изменить на противоположную с помощью коммутатора К при изменении знакового разряда ($\text{sign } m$), например, с 1 на 0. Это приводит к реверсированию ДАД.

С появлением микропроцессоров (МП) возможен программный способ задания управляющих импульсов (рис. 4.3). В этом

случае отработка алгоритма управления заключается в следующем. Период выходного напряжения силовой части разбивается на m интервалов. Каждому интервалу соответствует определенная ячейка памяти. В соответствии с диаграммой выходных напряжений в ячейку памяти заносятся требуемые значения выходного сигнала. Устройство последовательно проходит все m ячеек, формируя на выходе импульсы управления силовыми ключами. Оработка алгоритма управления при отсутствии сигнала останова происходит по кругу, т. е. после прохождения всех m адресов, вновь генерируется первый адрес и процесс повторяется.

Применение микропроцессорных устройств в управляющей части дискретного электропривода повышает надежность и по-

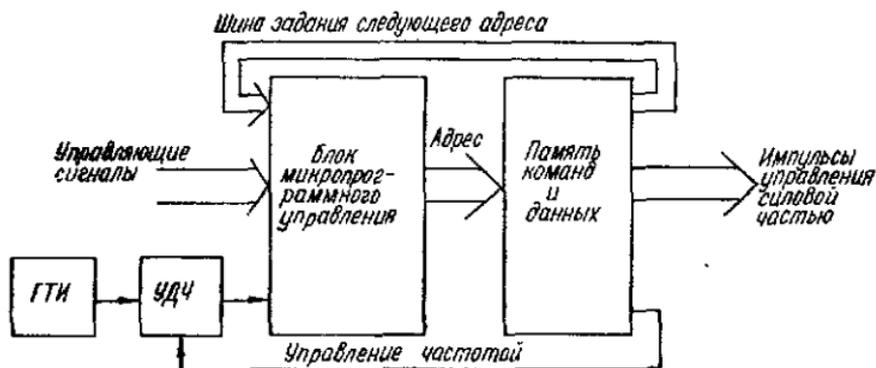


Рис. 4.3

мехозащищенность цифровых САУ, а смена программ управления или адреса массивов памяти позволяет оперативно изменять алгоритм переключения ключей силовой части. Простота задания регулируемых параметров сочетается с высокой точностью, стабильностью и воспроизводимостью результатов цифрового управления. Организация всей управляющей (слаботочной) части на одном МП сокращает монтажные работы, повышает надежность и универсальность, позволяет достаточно просто реализовывать необходимые законы изменения управляющих воздействий. Поскольку информация о процессе регулирования содержится в самом цифровом сигнале и не связана с его энергией, то она менее подвержена действию помех и искажений.

4.2. МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУХФАЗНЫМ АСИНХРОННЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Разработаны следующие методы цифрового (импульсного) управления ДАД [3—11; 39; 41]: фазовый, частотный, широтный, частотно-широтный, временной. Рассмотрим эти методы более подробно.

Фазовый метод. При этом методе цифрового управления обмотки OB и OU запитываются полным (при $\gamma = 0$) или неполным (при $\gamma = \pi/6$) прямоугольным напряжением неизменной амплитуды (см. рис. 4.1), а для обеспечения реверсивного управления изменяют фазовый сдвиг ψ между ними в пределах $\pm\pi/2$.

Запишем разложение в ряд Фурье при произвольной величине угла Ψ , если амплитуда полного ($\gamma = 0$) прямоугольного напряжения в обмотках возбуждения и управления равна U_{Δ} :

$$u_{\text{в}} = \frac{4U_{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \omega t;$$

$$u_{\text{у}} = \frac{4U_{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n (\omega t - \Psi), \quad n = 1, 3, 5, 7 \dots$$

Импульсное питание обмоток фаз статора вызывает значительное число побочных гармоник, отличных от основной. При регулировании Ψ состав гармоник не изменяется, а их амплитуды с одинаковым номером неизменны и равны. Фазовый сдвиг первых гармоник разложения равен сдвигу фаз полиугольного напряжения, а фазовый сдвиг высших гармоник пропорционален их номеру. При $\Psi = 0$ фазы каждой из гармоник указанных напряжений совпадают, поэтому пускового момента не создается и ротор остается неподвижным. При $\Psi = \pi/2$ каждая гармоника создает круговое вращающееся поле, обеспечивающее максимальную частоту вращения ротора. Гармоники с номером $n = 1, 5, 9, \dots$, имеющие такое же чередование фаз, как и у основной гармоники, создают только движущий момент, а гармоники с номером $n = 3, 7, 11, \dots$, образующие систему с обратным чередованием фаз, создают только тормозной момент.

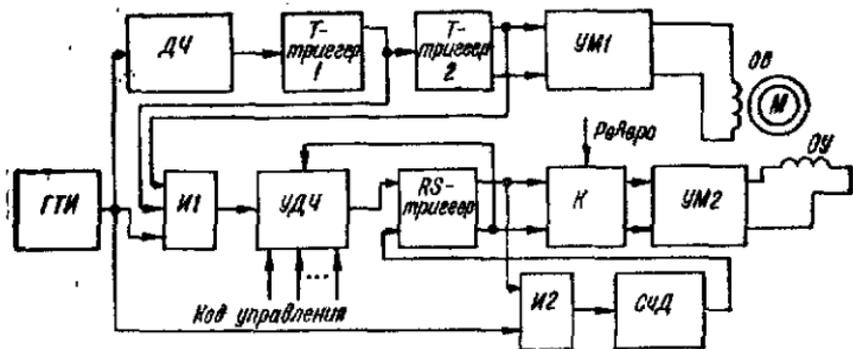
Изменение направления вращения асинхронного двигателя осуществляется путем изменения знака угла Ψ . При наличии гармонических составляющих напряжений магнитный момент на валу определяется алгебраической суммой моментов от всех составляющих: $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Аналогично определяется общая ак-

тивная мощность, потребляемая обмотками двигателя: $P_{\text{в}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\text{в}n}$;

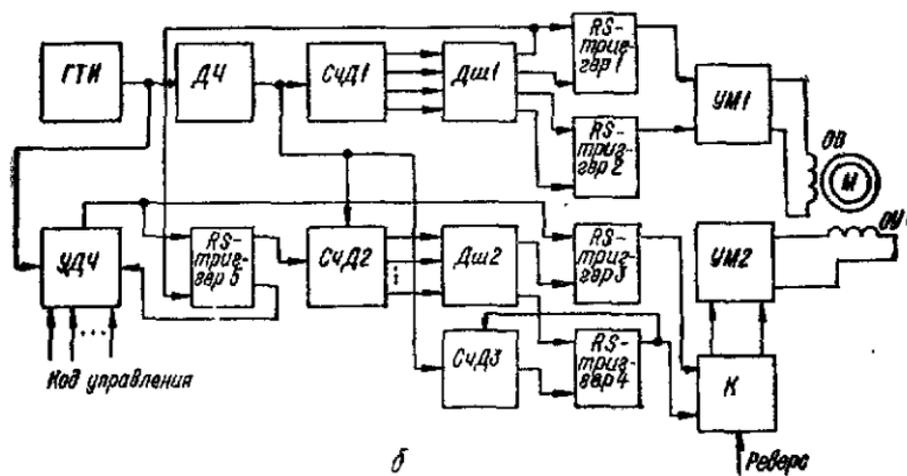
$P_{\text{у}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\text{у}n}$; $P = P_{\text{в}} + P_{\text{у}}$, где $P_{\text{в}}$ и $P_{\text{у}}$ — мощности, потребляемые обмотками возбуждения и управления двигателя соответственно; $P_{\text{в}n}$, $P_{\text{у}n}$ — мощности, потребляемые n -ми гармониками соответственно в обмотках возбуждения и управления двигателя.

Схема устройства, реализующего фазовый метод управления при полном ($\gamma = 0$) прямоугольном напряжении в обмотках электродвигателя, показана на рис. 4.4, а. Зависимость фазы напряжения Ψ в обмотке управления от кода управления N изображена на рис. 4.5 в виде многоступенчатой функции, близкой к линейной. Линейность регулирования фазы, элементарный уровень квантования которой определяется как $\Delta\Psi = \Psi(n)/(2^n - 1)$, зависит от числа разрядов n кода управления.

Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, показаны на рис. 4.6, где a — тактовые импульсы; b — импульсы на выходе делителя частоты; $в$ — импульсы на выходе первого



а



б

Рис. 4.4

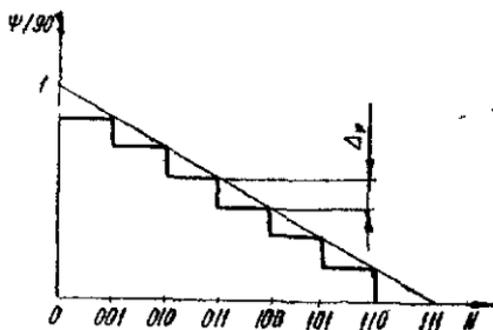


Рис. 4.5

T -триггера; z, d — импульсы на прямом и инверсном выходах второго T -триггера; e, u — тактовые импульсы соответственно на выходе первого и второго логических элементов И; $ж, к$ — импульсы переполнения соответственно на выходе управляемого делителя частоты и на выходе счетчика-делителя; $в, л$ — импульсы на прямом и инверсном выходах RS -триггера; $м, н$ —

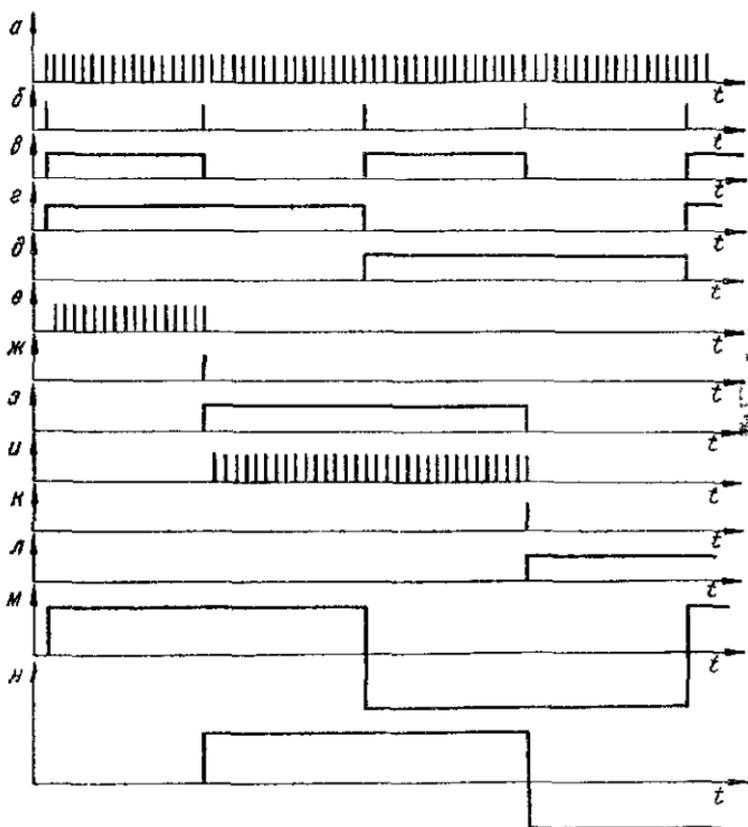


Рис. 46

импульсы на выходе первого и второго ключевых усилителей мощности.

Устройство работает следующим образом. В исходном состоянии RS -триггер и счетчик-делитель $СЧД$ находятся в состоянии «0», при этом на втором входе управляемого делителя частоты $УДЧ$ присутствует сигнал логической «1», разрешающий его работу. Генератор тактовых импульсов $ГТИ$ вырабатывает импульсы частотой $f_{ГТИ} = Kf_{дв}$, где K — коэффициент пропорциональности; $f_{дв}$ — рабочая частота АД. Значения K выбирают с учетом дискретности регулирования сдвига фазы напряжения в обмотке управления. Импульсы $ГТИ$ с частотой $f_{ГТИ}$ поступают на счетный вход делителя частоты $ДЧ$ и на один из входов первого и второго логических элементов И1 и И2. На выходе делителя частоты $ДЧ$ получается последовательность импульсов, частота

следования которых равна $4f_{дл}$ (рис. 4.6, б). С помощью последовательно включенных первого и второго T -триггеров обеспечивается получение управляющих импульсов (рис. 4.6, в—д), которые, воздействуя по первому и второму входам первого ключевого усилителя мощности $УМ1$, управляют формированием разнополярных импульсов (рис. 4.6, м) для питания обмотки возбуждения двигателя. Одновременное поступление сигналов логической «1» с прямых выходов первого и второго T -триггера на второй и третий входы первого логического элемента $И1$ разрешает последнему пропускать на свой выход импульсы частоты $f_{ГТИ}$ только в первой четверти периода напряжения обмотки возбуждения.

Полученная «пачка» импульсов (рис. 4.6, е) поступает на счетный вход управляемого делителя частоты $УДЧ$, коэффициент деления которого соответствует коду управления. Число разрядов управляемого делителя частоты равно числу разрядов управляющего кода и определяется требуемой дискретностью изменения сдвига фазы напряжения управления относительно напряжения возбуждения. Переполнение управляемого делителя частоты может наступить (в зависимости от устанавливаемого коэффициента деления) с приходом на его счетный вход любого импульса из поступившей «пачки», который и определит величину фазового сдвига.

Рассмотрим случай, когда переполение управляемого делителя частоты происходит с приходом последнего входного импульса (рис. 4.6, ж), т. е. фазовый сдвиг составляет 90° .

При этом RS -триггер устанавливается в состоянии «1», с его обратного выхода сигнал логического «0» запрещает работу управляемого делителя частоты, а с прямого выхода — сигнал логической «1» разрешает логическому элементу $И2$ пропускать на счетный вход счетчика-делителя $СЧД$ импульсы частоты $f_{ГТИ}$ (рис. 4.6, и). Счетчик-делитель осуществляет подсчет входных импульсов до его полного заполнения, что по времени соответствует полупериоду напряжения питающей сети.

Импульс переполения, сформированный на его выходе (рис. 4.6, к), возвращает RS -триггер в исходное нулевое состояние, при этом снимается запрет на работу управляемого делителя частоты и прекращается поступление импульсов от $ГТИ$ на вход счетчика-делителя. Полученные сигналы единичного уровня с прямого (рис. 4.6, в) и обратного (рис. 4.6, л) выходов RS -триггера управляют через коммутатор K режимом переключения второго ключевого усилителя мощности $УМ2$. Сформированные разнополярные импульсы (рис. 4.6, н) требуемой мощности с выхода $УМ2$ непосредственно запитывают обмотку управления двухфазного асинхронного двигателя. Если изменить код управления, то переполение управляемого делителя частоты наступит раньше (т. е. фазовый сдвиг будет меньше), а работа устройства в дальнейшем аналогична рассмотренной.

Для обеспечения реверсирования асинхронного двигателя необходимо с помощью коммутатора под действием сигнала реверса (рис. 4.4, а) изменить очередность следования управляющих импульсов (рис. 4.6, в, л) на входы второго усилителя мощности, при этом фаза напряжения в обмотке управления скачком изменится на 180° по отношению к напряжению возбуждения. При обеспечении высокой линейности и дискретности регулирования фазы линейность механических и регулировочных ха-

характеристик при фазовом управлении выше, чем при амплитудном. Хотя при нулевом сигнале управления ($\Psi = 0$) и в его окрестности наблюдается значительное потребление мощности, однако в этом диапазоне регулирования несколько повышается чувствительность двигателя по изменению скорости и момента. Последний факт объясняется тем, что для малых значений Ψ значительное число гармоник создают результирующий двигательный момент.

Основным недостатком рассмотренного фазового метода управления является существенное уменьшение степени использования двигателя по моменту и мощности при питании его обмоток полным прямоугольным напряжением по сравнению с питанием синусоидальным напряжением. Особенно это характерно, когда действующее значение первой гармоники прямоугольного напряжения равно номинальному синусоидальному напряжению. При этом увеличение потерь в двигателе может достигнуть 23 % [32].

Повысить коэффициент использования ДАД по мощности можно путем исключения из напряжения питания обмоток двигателя гармоник, кратных трем. Если импульсы (см. рис. 4.1) разложить в ряд Фурье, то напряжение в обмотках возбуждения и управления можно представить соответственно в виде

$$u_a = \frac{4U_n}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \gamma \sin n \omega t;$$

$$u_b = \frac{4U_n}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \gamma \sin n (\omega t - \psi), \quad n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

При $2\gamma = \pi/3$ или $\gamma = \pi/6$ и произвольном фазовом сдвиге ψ соответственно получаем

$$u_a = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} U_n \left(\sin \omega t - \frac{\sin 5\omega t}{5} - \frac{\sin 7\omega t}{7} + \frac{\sin 11\omega t}{11} + \dots \right);$$

$$u_b = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} U_n \left[\sin (\omega t - \psi) - \frac{\sin 5 (\omega t - \psi)}{5} - \frac{\sin 7 (\omega t - \psi)}{7} + \dots \right]$$

т. е. прямоугольное напряжение с паузой между импульсами, равной $\pi/3$, не содержит гармоник, кратных трем.

Схема устройства, реализующего фазовый метод управления двухфазным асинхронным двигателем при неполном ($\gamma = \pi/6$) прямоугольном напряжении в обмотках двигателя, показана на рис. 4.4, б. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы — на рис. 4.7, где: *a* — тактовые импульсы; *b* — импульсы на выходе делителя частоты; *в*—*е* — импульсы на выходе первого дешифратора; *ж*, *з* — сигналы с прямых выходов первого и второго RS-триггеров; *и*, *о* — импульсы переполнения соответственно с выхода управляемого делителя частоты и с выхода третьего счетчика-делителя; *к*, *л* — сигналы на первом и втором выходах второго дешифратора; *м*, *н* — сигналы с прямых выходов третьего и четвертого RS-триггеров; *п*, *р* — импульсы на выходах первого и второго ключевых усилителей мощности.

Рассмотрим работу устройства. В исходном состоянии все RS-триггеры, кроме первого, а также все счетчики-делители

СчД находятся в состоянии логического «0». При этом на управляющем входе управляемого делителя частоты УДЧ (инверсном выходе пятого RS-триггера) присутствует сигнал логической «1», разрешающий его работу. Первый RS-триггер находится в состоянии логической «1». Импульсы частотой $f_{ГТИ} = Kf_{дв}$, где $f_{дв}$ — рабочая частота двигателя; K — коэффициент про-

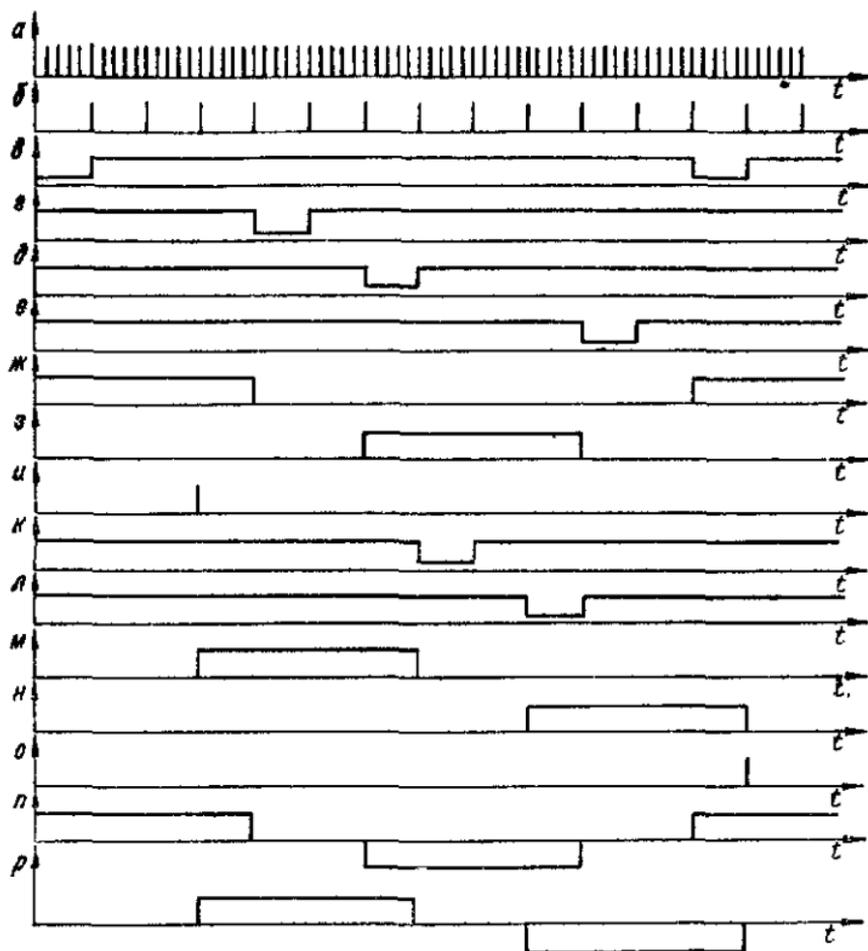


Рис. 47

порциональности, с выхода генератора тактовых импульсов ГТИ поступают на вход управляемого делителя частоты УДЧ и неуправляемого делителя частоты ДЧ. Коэффициент деления последнего выбирается из соотношения $K_1 = f_{ГТИ}/f_{д.ч} = f_{ГТИ}/12f_{дв}$, где $f_{д.ч}$ — частота следования импульсов на выходе делителя частоты, равная $12f_{дв}$. Импульсы с выхода делителя частоты ДЧ поступают на счетные входы первого, второго и третьего счетчиков-делителей СчД1—СчД3. Первый счетчик-делитель постоянно работает в режиме циклического счета, и его состояние «опрашивается» первым дешифратором Дш1. На выходах дешифратора последовательно появляется сигнал логического «0» (рис. 4.7, в—е). Первый и второй выходы пер-

вого дешифратора соединены с установочными входами первого *RS*-триггера, а третий и четвертый выходы — с установочными входами второго *RS*-триггера.

С приходом сигнала логического «0» с соответствующего выхода первого дешифратора на первый вход (на рис. 4.4, б верхний) первого или второго *RS*-триггеров они устанавливаются в состояние логической «1» (рис. 4.7, ж, в). В состоянии логического «0» первый и второй *RS*-триггеры устанавливаются подачей с первого дешифратора установочных импульсов на их второй вход (на рис. 4.4, б нижний). Сигналы с прямых выходов первого и второго *RS*-триггеров поступают на входы первого усилителя мощности *УМ1*, который формирует разнополярные импульсы (рис. 4.7, л) для питания обмотки возбуждения двигателя

Регулирование скорости и момента двигателя при фазовом методе управления осуществляется изменением фазового сдвига последовательности разнополярных импульсов в обмотке управления относительно аналогичной последовательности в обмотке возбуждения. Для этого на задающие входы управляемого делителя частоты поступает код управления, число разрядов которого равно числу разрядов управляемого делителя частоты и определяется требуемой дискретностью изменения фазового сдвига. Так как максимальный фазовый сдвиг может достигнуть 90° (при максимальной скорости двигателя), то емкость управляемого делителя частоты должна быть равна числу импульсов частоты $f_{гтн}$, укладываемых в одной четверти периода напряжения питающей сети.

Переполнение управляемого делителя частоты наступает при определенном сигнале (коде) управления импульсом, поступающим во время первой четверти периода возбуждения.

Рассмотрим случай, когда переполнение управляемого делителя частоты происходит последним импульсом, пришедшим в момент окончания первой четверти напряжения в обмотке возбуждения. В этом случае фазовый сдвиг составляет 90° . Импульс переполнения (рис. 4.7, и) с выхода управляемого делителя частоты, воздействуя на первые входы третьего и пятого *RS*-триггеров, установит триггеры в состояние логической «1». При этом пятый *RS*-триггер сигналом логической «1» с прямого выхода разрешает работу второго счетчика-делителя и сигналом логического «0» с инверсного выхода запрещает работу управляемого делителя частоты.

Второй счетчик-делитель для последовательности входных импульсов частоты $f_{д.ч}$ имеет коэффициент деления, равный 7, а его состояние «опрашивается» вторым дешифратором *Дш2*. С приходом четвертого по счету импульса на вход второго счетчика-делителя *СчД2* на первом выходе второго дешифратора появляется сигнал логического «0» (рис. 4.7, к), который возвратит по второму входу третий *RS*-триггер в состояние логического «0» (рис. 4.7, м). С приходом шестого по счету импульса на вход второго счетчика-делителя на втором выходе второго дешифратора появляется сигнал логического «0» (рис. 4.7, л), который устанавливает в состояние логической «1» четвертый *RS*-триггер (рис. 4.7, н). Очередной входной импульс возвращает второй счетчик-делитель в исходное нулевое состояние.

Сигнал логической «1» с прямого выхода четвертого *RS*-триггера разрешает работу третьему счетчику-делителю с коэф-

фициентом деления 4. Импульс переполнения, возникающий на выходе третьего счетчика-делителя после прихода четвертого по счету входного импульса, возвращает четвертый RS-триггер в нулевое состояние. В свою очередь, сигнал логического «0» с прямого выхода четвертого RS-триггера запрещает работу третьего счетчика-делителя. Таким образом, заканчивается цикл формирования управляющих импульсов на выходах третьего и четвертого RS-триггеров. Полученные сигналы единичного уровня с прямых выходов третьего и четвертого RS-триггеров управляют (через коммутатор) режимом переключения второго усилителя мощности, который формирует разнополярные импульсы в обмотке управления двигателя (рис. 4.7, р). Очередной цикл формирования фазных напряжений начинается после того, как первый счетчик-делитель возвратится в состояние логического «0», сигнал логического «0» с первого выхода первого дешифратора (рис. 4.7, в) установит первый RS-триггер в исходное состояние логической «1», а пятый RS-триггер — в исходное состояние логического «0».

Если уменьшить значение кода управления, то переполнение управляемого делителя частоты наступит раньше (фазовый сдвиг будет меньше), а работа устройства в дальнейшем сводится к повторению рассмотренного ранее случая.

Под действием сигнала реверса коммутатором изменяется фаза напряжения в обмотке управления на 180° . Питание электродвигателя неполным прямоугольным напряжением с паузой между импульсами, равной $\pi/3$, приводит не только к увеличению коэффициента использования двигателя по мощности, но улучшает линейность и расширяет диапазон регулирования скорости и момента.

Частотный метод. Сущность метода заключается в формировании разнополярных импульсов постоянной длительности τ_n (равной половине периода питающей сети при максимальной скорости двигателя), угловая частота следования ω которых зависит от сигнала управления (кода управления), и подключении обмоток фаз статора двигателя к двухфазной системе таких импульсов. При этом фазовый сдвиг Ψ между питающими электродвигатель напряжениями в обмотках возбуждения и управления в процессе регулирования угловой скорости ω остается постоянным и равным 90° .

Запишем напряжения в обмотках возбуждения и управления двигателя при разложении в ряд Фурье:

$$u_x = \frac{4U_n}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \left(\frac{T}{4} - \frac{\tau_n}{2} \right) \sin n \omega t;$$

$$u_y = \frac{4U_n}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \left(\frac{T}{4} - \frac{\tau_n}{2} \right) \sin n \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

Регулируемым параметром является угловая частота ω , а значит, и период $T = 2\pi/\omega$. При изменении периода следования импульсного напряжения изменяется длительность паузы между импульсами, амплитуда и частота следования всех гармонических составляющих. Определяющее влияние на момент, развива-

емый ротором, и скорость вращения ротора оказывают амплитуду и частота первой гармоники питающего напряжения.

На рис. 4.8 показана схема устройства, реализующего частотный метод управления двухфазным асинхронным электродвигателем. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, изображены на рис. 4.9, где: *a* — тактовые импульсы; *b* — импульсы на выходе управляемого делителя частоты; *в, г* — импульсы на прямом и инверсном выходах первого *T*-триггера; *д, е* — импульсы на прямом и инверсном выходах второго *T*-триггера; *ж, л* — изменение магнитной индукции трансформаторов первого и второго усилителей мощности; *и, к* — импульсы на прямом и инверсном выходах третьего *T*-триггера; *в, м* — импульсы на выходе первого и второго усилителей мощности.

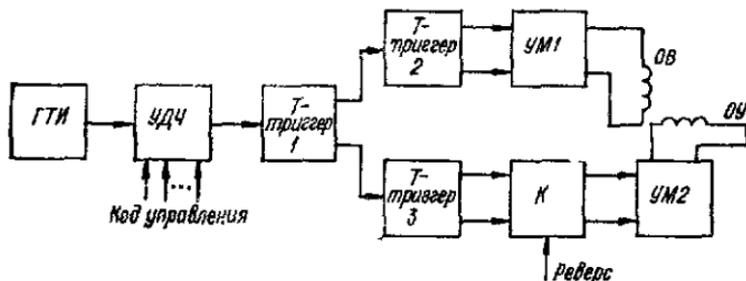


Рис. 4.8

Устройство работает следующим образом. Генератор тактовых импульсов *ГТИ* вырабатывает импульсы частотой $f_{ГТИ} = 4Kf_{дв}$, где $f_{дв}$ — рабочая частота асинхронного двигателя. Значения коэффициента *K* выбирают с учетом требуемого диапазона и дискретности регулирования частоты вращения. Импульсы с *ГТИ* поступают на счетный вход управляемого делителя частоты *УДЧ*, частота выходных импульсов которого (рис. 4.9, б) определяется значениями кода управления. Первый *T*-триггер работает в счетном режиме, прямой и обратный выходы этого триггера (рис. 4.9, в, г) управляют переключением соответственно второго и третьего *T*-триггеров. Полученные импульсы управления с прямых и обратных выходов второго и третьего *T*-триггеров поступают на входы усилителей мощности *УМ*. Причем *УМ1* управляется непосредственно, а *УМ2* — через коммутатор *К*. Коммутатор при наличии сигнала реверса изменяет очередность прохождения управляющих импульсов на входы второго усилителя мощности *УМ2*, тем самым происходит реверс двигателя.

Основное назначение усилителей мощности, выполненных по двухтактной схеме с насыщающимся трансформатором, содержащим сердечник с прямоугольной петлей гистерезиса, — формирование разнополярных импульсов прямоугольной формы одинаковой длительности и усиление по мощности сформированных импульсов. Время полного перемагничивания насыщающегося трансформатора определяется временным интервалом перемагничивания трансформатора от максимальной индукции одного знака до максимальной индукции другого знака и обратно.

В процессе регулирования скорости электродвигателя в широком диапазоне ее изменения время полного перемагничивания трансформатора может находиться в различных соотношениях к периоду поступления управляющих сигналов на входы первого и второго усилителей мощности. При этом для их работы характерно следующее: если время полного перемагничивания трансформатора равно или больше периода поступления управляющих сигналов, то на выходе получается меандр с амплитудой-

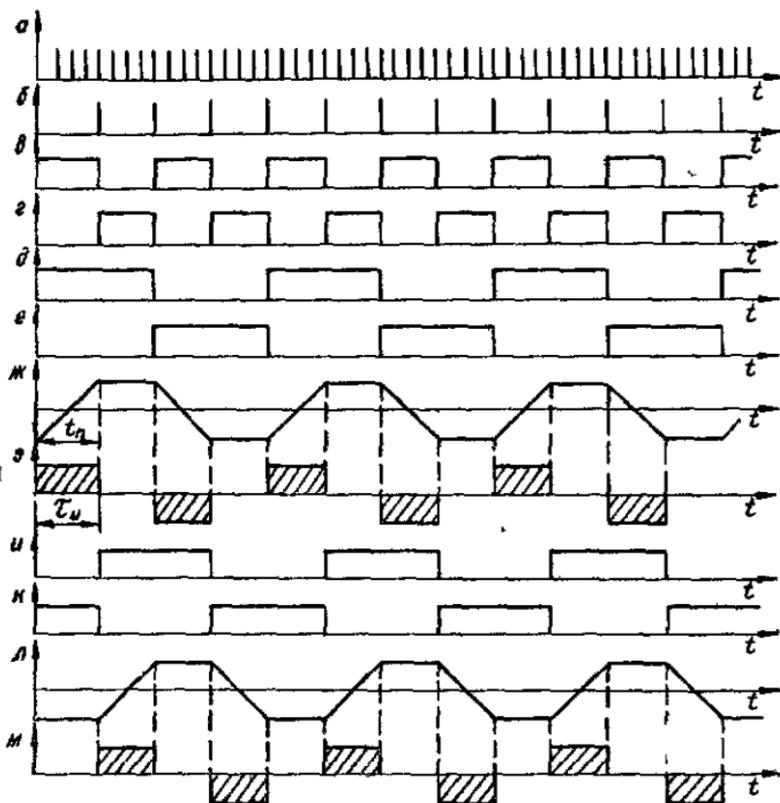


Рис. 4.9

$n_{\text{тр}} U_{\text{п}}$, где $n_{\text{тр}}$ — коэффициент трансформации насыщающегося трансформатора. Это обычно получается в том случае, когда регулирование скорости двигателя осуществляется «вверх» относительно заданной. При регулировании скорости двигателя «вниз», время полного перемагничивания трансформатора становится меньше периода поступления управляющих импульсов. В этом случае на выходе как первого, так и второго усилителей мощности формируются неполные разнополярные импульсы амплитудой $n_{\text{тр}} U_{\text{п}}$ и длительностью, равной времени перемагничивания трансформатора от максимальной индукции одного знака до максимальной индукции другого знака (рис. 4.9, ж, л):

$$t_{\text{п}} = \tau_{\text{и}} = 2n_1 B_m S_{\text{ст}} / U_{\text{п}},$$

где B_m — максимальная индукция сердечника; $S_{ст}$ — сечение сердечника; U_n — напряжение питания усилителей мощности; n_1 — число витков половины первичной обмотки насыщающегося трансформатора.

Из этого выражения видно, что при $U_n = \text{const}$ длительность импульсов не зависит от частоты поступления управляющих импульсов, а определяется параметрами сердечника и числом витков первичной обмотки насыщающегося трансформатора. Дальнейшее увеличение коэффициента деления управляемого делителя частоты приводит к увеличению периода следования управляющих импульсов на входах первого и второго усилителей мощности и уменьшению среднего за полупериод напряжения на его выходах [32]:

$$U_{ср} = \frac{n_{тр} U_n \tau_n}{\pi} \omega.$$

Так как величины $n_{тр}$, U_n и τ_n постоянные, то величина среднего за полупериод выходного напряжения линейно зависит от изменения частоты ω импульсного напряжения, управляющего усилителем мощности. Выходное импульсное напряжение первого и второго усилителей мощности используется для питания соответственно обмотки возбуждения и обмотки управления ДАД.

Таким образом, при достаточной простоте технической реализации, устройство обеспечивает хорошую точность и линейность регулирования скорости вращения как «вверх», так и «вниз» относительно заданной. Наличие в устройстве только частотного канала управления позволяет реализовать на практике самый простой закон регулирования напряжения в обмотках электродвигателя, а именно $U/f = \text{const}$.

При этом следует иметь в виду, что для двухфазного асинхронного двигателя создаются условия, близкие к номинальным, лишь в небольшом диапазоне изменения частоты: от f_n до $0,5 f_n$. Глубокое частотное регулирование скорости вращения «вниз» от номинальной приводит к пульсациям момента, которые обуславливают неравномерность вращения вала электродвигателя. Пульсации момента на частоте выше основной обычно игнорируются из-за демпфирующего эффекта, создаваемого инерцией машины. Причина резкого ухудшения характеристик ДАД в области низких частот вращения заключается в возрастающей роли активного сопротивления статора. При увеличении частоты от номинальной момент двигателя уменьшается из-за возрастания индуктивного сопротивления обмотки статора. Все эти нежелательные явления можно устранить дополнительным повышением напряжения питания. Поскольку рассмотренное устройство не обеспечивает коррекцию напряжения питания с учетом потерь, хорошая линейность регулирования наблюдается лишь в интервале 200—500 Гц при $f_n = 400$ Гц. Вследствие перечисленных недостатков этот метод применяют, главным образом, для получения небольшого диапазона изменения скоростей (например, в приводах стабильной скорости).

Широтный и частотно-широтный методы. Широтно-импульсное управление ДАД обеспечивается изменением длительности импульсов напряжения переменного тока прямоугольной формы,

запитывающего обмотку управления. Обмотка возбуждения электродвигателя, как правило, запитывается полным прямоугольным напряжением. Фаза напряжения возбуждения постоянно сдвинута относительно фазы напряжения управления на 90° . При этом скважность импульсов меняется от 0 до 0,5 и модулируется чаще всего временное положение заднего фронта импульса (см. рис. 4.1).

Из разложения в ряд Фурье напряжения

$$u = \frac{4U_{II}}{\pi} \left(\cos \gamma \sin \omega t + \frac{\cos 3\gamma \sin 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\gamma \sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

видно, что при регулировании длительности импульсов, а соответственно и паузы (2γ) между импульсами, изменяется среднее значение напряжения, приложенного к обмотке управления. При этом изменяется результирующий пусковой момент ДАД.

Устройства, реализующие широтно-импульсное управление ДАД, имеют один недостаток — невысокую степень использования двигателя по мощности и моменту, обусловленную, в первую очередь, влиянием третьей гармоники.

Устранить влияние гармоник, кратных трем, можно, если для питания обмоток использовать прямоугольное напряжение, имеющее паузу между импульсами, равную $\pi/3$. При $\gamma = \pi/6$ гармоники, кратные трем, отсутствуют.

Схема устройства широтно-импульсного управления двухфазным асинхронным двигателем изображена на рис. 4.10. Она формирует именно такое напряжение на обмотке возбуждения независимо от величины сигнала управления и на обмотке управления — при максимальном сигнале управления. В процессе управления пауза между прямоугольными импульсами в обмотке управления изменяется, при этом появляются гармоники, кратные трем, но они создают только пульсирующее поле и не оказывают влияние на пусковой момент двигателя. При питании двигателя напряжением неполной прямоугольной формы, не содержащим гармоник, кратных трем, по сравнению с питанием от синусоидального напряжения КПД снижается на 1—1,5 %, момент электродвигателя остается практически без изменения.

Элюры, поясняющие работу этой схемы, изображены на рис. 4.11, где a — импульсы на выходе делителя частоты; b — $ж$ — импульсы логического «0» на выходах (с первого по шестой) дешифратора; v , $и$ — импульсы на прямых выходах первого и второго RS-триггеров; $к$ — тактовые импульсы; $л$, $м$ — импульсы на прямых выходах третьего и четвертого RS-триггеров; $н$, $о$ — импульсное напряжение на выходах первого и второго усилителей мощности.

Устройство работает следующим образом. Генератор тактовых импульсов ГТИ вырабатывает импульсы прямоугольной формы, частота следования которых равна $f_{ГТИ} = Kf_{дв}$, где K — общий коэффициент деления делителя частоты и счетчика-делителя; $f_{дв}$ — рабочая частота двигателя. Емкость счетчика-делителя равна величине отношения периода питающей сети двигателя к числу $\pi/6$ $\left(\frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \right)$. Коэффициент деления делителя частоты ДЧ определяется дискретностью регулирования длительности импульсов управляющего напряжения.

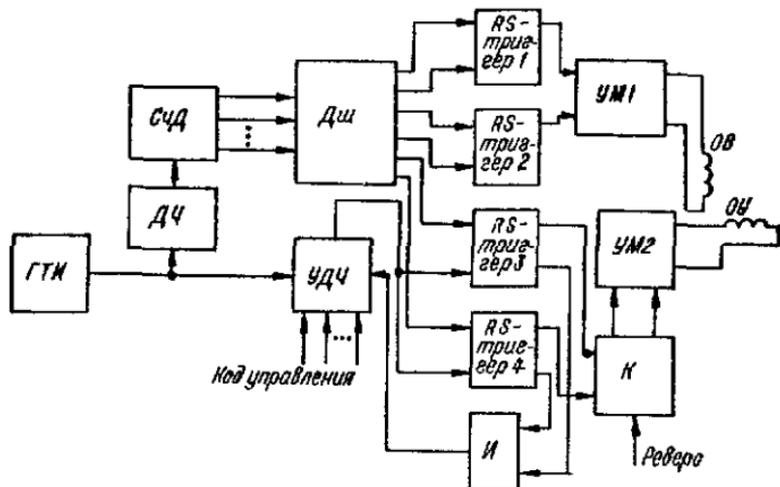


Рис. 4.10

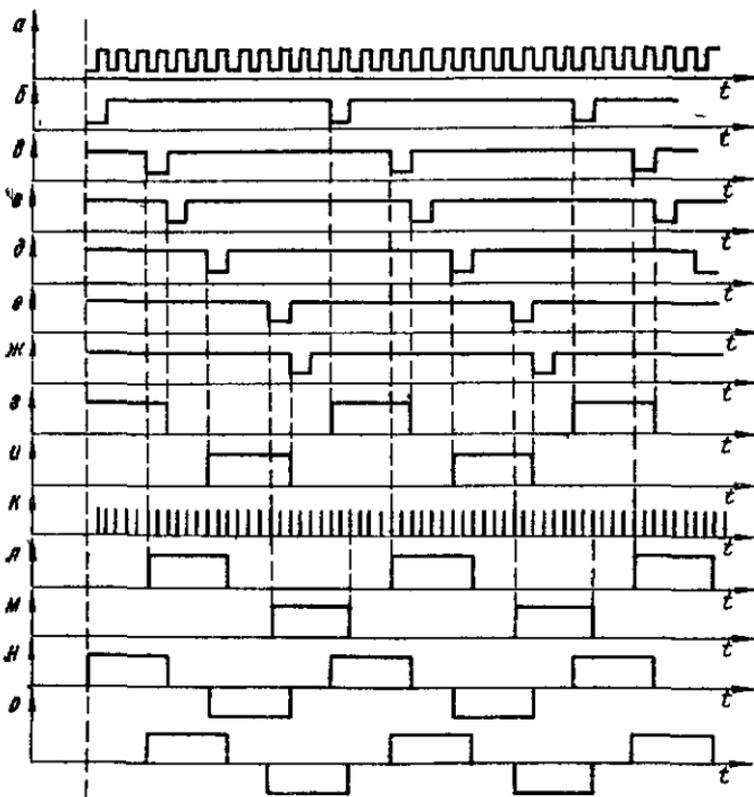


Рис. 4.11

В исходном состоянии первый, второй, третий и четвертый RS -триггеры находятся в пулевом состоянии (на прямых выходах — логические «0», на инверсных выходах — логические «1»). С инверсных выходов третьего и четвертого RS -триггеров сигналы логической «1» поступают на входы логического элемента H , выходной сигнал которого (также логической «1») запрещает работу управляемого делителя частоты $УДЧ$. С приходом первого импульса на вход счетчика-делителя $Сд$ начинается цикл формирования широтно-импульсных сигналов для питания обмоток фаз статора. Состояние счетчика-делителя дешифруется, при этом на выходах дешифратора последовательно появляются сигналы логического «0» (рис. 4.11, б—ж). При поступлении сигнала логического «0» с соответствующего выхода дешифратора на S -вход (на рис. 4.10 верхний) любого из RS -триггеров они устанавливаются в состояние «1», при этом на их прямом выходе присутствует сигнал логической «1» (рис. 4.11, в, и, л, м). Управление по R -входу (на рис. 4.10 нижний) первого и второго RS -триггеров осуществляется с выхода дешифратора, а третьего и четвертого — с выхода управляемого делителя частоты. Сформированные импульсы прямоугольной формы с прямых выходов первого и второго RS -триггеров управляют режимом переключения первого усилителя мощности $УМ1$, выходное импульсное напряжение (рис. 4.11, н) которого непосредственно запитывает обмотку возбуждения двигателя. Пауза между импульсами составляет $\pi/3$, а частота следования импульсов равна удвоенной рабочей частоте двигателя.

Для регулирования скорости и момента питание обмотки управления ДАД осуществляется разнополярными импульсами регулируемой длительности (рис. 4.11, о). С этой целью на управляемые входы управляемого делителя частоты поступает код управления, а с установкой третьего или четвертого RS -триггеров в состояние «1» снимается запрет на подсчет им входных импульсов. Для каждого кода управления в управляемом делителе частоты устанавливается определенный коэффициент деления для импульсов частоты $f_{ГТИ}$, присутствующих на его входе. Выходные импульсы управляемого делителя частоты, возвращая третий и четвертый RS -триггеры в исходное (нулевое) состояние, определяют длительность управляющих импульсов на их прямых выходах (рис. 4.11, л, м). Коммутатор K определяет очередность подключения управляющих импульсов на входы второго усилителя мощности $УМ2$, к выходу которого подключена обмотка управления двигателя.

Сдвиг по фазе разнополярных импульсов в обмотке управления относительно разнополярных импульсов в обмотке возбуждения составляет 90° . Для кода управления, равного нулю, напряжение в обмотке управления равно нулю и пускового момента не создается. Изменяя очередность следования управляющих импульсов с прямых выходов третьего и четвертого RS -триггеров (рис. 4.11, л, м) при наличии сигнала реверса, изменяют на 180° фазу напряжений в обмотке управления и тем самым добиваются реверсирования двигателя.

Мощность, потребляемая обмоткой возбуждения двигателя при данном методе управления, близка к мощности, потребляемой при синусоидальном напряжении. По сравнению с фазовым управлением, значительно уменьшается мощность, потребляемая обмоткой управления при малых сигналах управления. Расширяется диапазон линейного регулирования скорости и момента.

Положительные качества устройства обусловлены устранением отрицательного влияния третьей гармоники, что сказывается на увеличении коэффициента использования двигателя по мощности и моменту. Недостатком устройства является то, что при однообмоточном управлении невозможно создать для двигателя симметричный режим работы, при котором вращающееся магнитное поле является круговым.

При управлении по обеим обмоткам можно обеспечить симметричный или близкий к нему режим и тем самым существенно снизить потери, связанные со значительной асимметрией напряжения на обмотках. Для создания симметричного режима необходимо одновременно подключать обе обмотки двигателя к двухфазной системе импульсов регулируемой длительности.

Схема устройства для симметричного (двухобмоточного) широтно-импульсного управления двухфазным асинхронным двигателем показана на рис. 4.12. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, изображены на рис. 4.13, где: *a* — тактовые импульсы; *b* — импульсы на выходе делителя частоты *ДЧ*; *в*, *г* — импульсы на прямом и инверсном выходах *T*-триггера; *д*—*з* — импульсы на прямом и инверсном выходах *T*-триггеров соответственно блоков широтной модуляции канала обмотки возбуждения и канала обмотки управления; *и*, *к* — импульсное напряжение на выходах первого и второго усилителей мощности.

При симметричном (двухобмоточном) широтно-импульсном управлении двухфазным асинхронным двигателем по сравнению с несимметричным (однообмоточным) уменьшаются активная потребляемая мощность (при нулевом сигнале управления двигатель энергии не потребляет), искажения механических характеристик, пульсации вращающегося момента, улучшаются КПД двигателя и регулировочные характеристики, устраняется явление самохода. При симметричном управлении с критическим скольжением $S_{кр} = 1$ двигатель имеет более лучшие динамические свойства.

Схема устройства для частотно-широтно-импульсного симметричного (двухобмоточного) управления двухфазным асинхронным двигателем показана на рис. 4.14. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, изображены на рис. 4.15, где: *a* — тактовые импульсы; *b* — импульсы на выходе второго управляемого делителя частоты; *в*, *г* — импульсы на прямом и инверсном выходах *T*-триггера; *д*, *е*, *в*, *и* — импульсы на прямом и инверсном выходах *T*-триггеров соответственно блоков широтной модуляции канала обмотки возбуждения и канала обмотки управления; *ж* — импульсы на выходе первого управляемого делителя частоты; *к*, *л* — импульсное напряжение на выходах первого и второго усилителей мощности.

При выборе частоты генератора тактовых импульсов *ГТИ* исходят из тех же требований, что и при частотно-импульсном управлении. Выходные импульсы генератора тактовых импульсов поступают на счетные входы первого и второго управляемых делителей частоты *УДЧ1* и *УДЧ2*, коэффициенты деления которых определяются соответственно значениями кодов регулирования длительности и частоты импульсного напряжения, питающего обмотки статора двигателя.

С выхода второго управляемого делителя частоты импульсная последовательность (рис. 4.15, б) поступает на вход *T*-триггера, который вызывает поочередное переключение *T*-триггеров

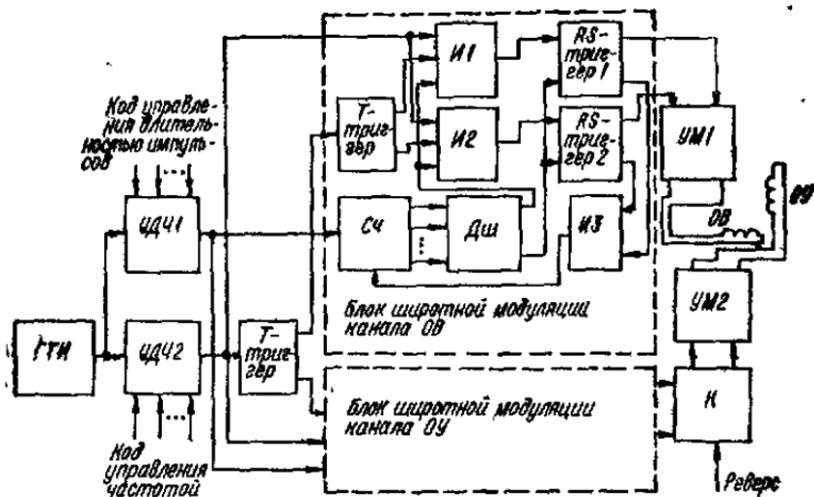


Рис. 4.14

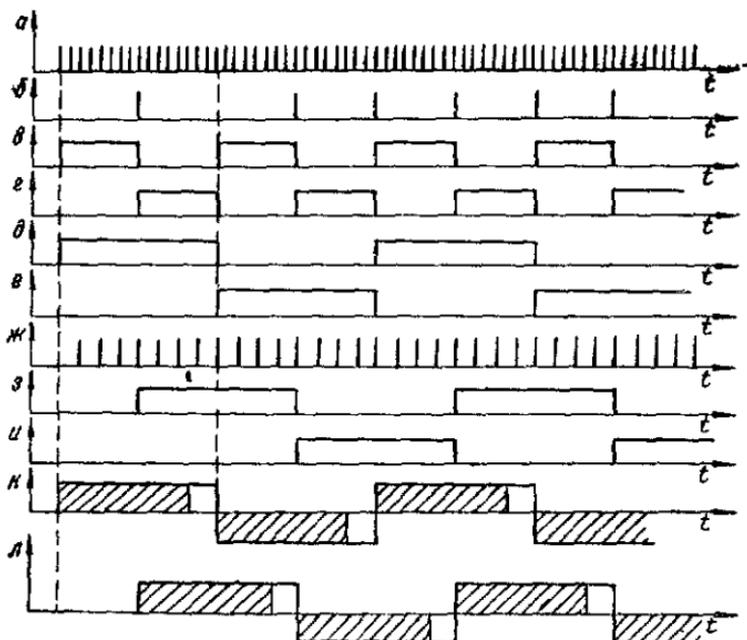


Рис. 4.15

в блоках широтной модуляции канала обмотки возбуждения (рис. 4.15, *д, е*) и канала обмотки управления (рис. 4.15, *в, з*) соответственно. В исходном состоянии первый и второй RS-триггеры находятся в нулевом состоянии, при этом уровень логической «1» с выхода третьего логического элемента И3 устанавливает все выходы счетчика С4 в состояние «0», что приводит к появлению на первом выходе дешифратора Дш логической «1», которая открывает по трем входам первый и второй логические элементы И1 и И2.

При совпадении сигнала с выхода второго управляемого делителя частоты УДЧ2 с сигналом на прямом выходе Т-триггера блока широтной модуляции, на выходе первого логического элемента И1 формируется логическая «1», которая устанавливает первый RS-триггер в состояние «1». При этом третий логический элемент И3 снимает со счетчика запрет на подсчет входных импульсов, поступающих с выхода первого управляемого делителя частоты УДЧ1. Период следования этих импульсов (рис. 4.15, *ж*) в зависимости от кода регулирования изменяется, что влияет на время заполнения счетчика, в течение которого на прямом выходе первого RS-триггера присутствует сигнал логической «1». Количество накапливаемых в счетчике импульсов фиксируется, и после прихода последнего на его выходе обрабатывается код, вызывающий появление логической «1» на втором выходе дешифратора, который возвращает первый RS-триггер в исходное состояние. Одновременно с этим счетчик устанавливается в нулевое состояние. При изменении периода следования импульсов с выхода первого управляемого делителя частоты при фиксированном числе накапливаемых в счетчике импульсов, изменяется длительность импульсов на выходе усилителей мощности УМ.

Аналогично работают блоки широтной модуляции и при совпадении сигнала с выхода второго управляемого делителя частоты с сигналом на инверсном выходе Т-триггера.

Сформированные таким образом сигналы управления регулируемой длительности и частоты поступают на первый усилитель мощности непосредственно и на второй усилитель мощности через коммутатор К. Усиленное по мощности импульсное напряжение запитывает обмотки фаз статора. Под действием сигнала реверса изменяется очередность следования управляющих импульсов на входе второго усилителя мощности, что приводит к реверсированию двигателя.

На основе предлагаемого устройства можно построить более сложные системы с цифровой коррекцией напряжения, питающего обмотки статора двигателя, благодаря наличию дополнительного канала широтно-импульсного регулирования. Это расширяет диапазон линейного регулирования, главным образом, за счет более низких скоростей. Возможность цифровой коррекции длительности управляющих импульсов позволяет регулировать частоту вращения вала двигателя как «вверх», так и «вниз» относительно заданной. Осуществление частотно-широтно-импульсного регулирования дает возможность улучшить гармонический состав питающего напряжения и соответственно энергетические характеристики двигателя.

Временной метод. Схема устройства для время-импульсного симметричного (двухобмоточного) управления двухфазным асинхронным двигателем показана на рис. 4.16, временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, — на рис. 4.17, где:

выходе последнего также сигнала логической «1», который установит первый *RS*-триггер в состояние «1». При этом через второй элемент *ИЛИ2* снимается запрет на подсчет счетчиком импуль-

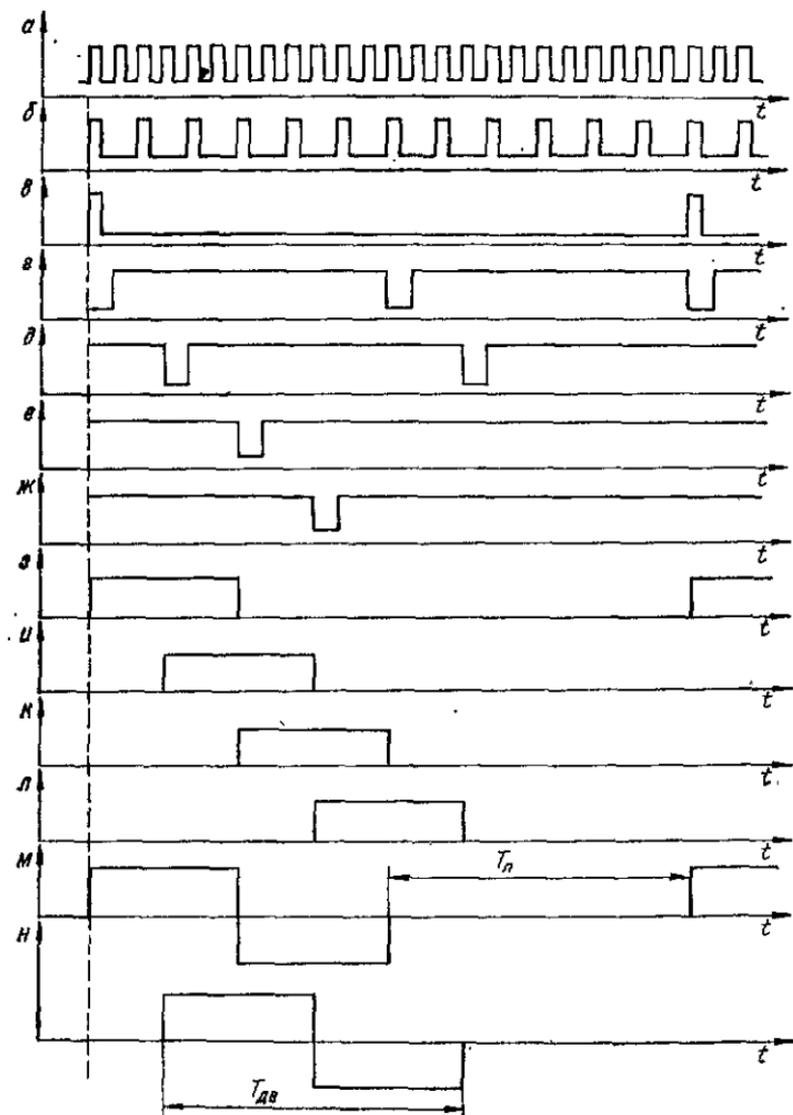


Рис. 4.17

сов генератора $f_{ГТИ}$. Состояние счетчика дешифруется, на выходах дешифратора появляются сигналы логического «0» (рис. 4.17, з—ж). Выходы дешифратора соединены с установочными входами *RS*-триггеров. С приходом сигнала логической «1» с соответствующего выхода дешифратора на *S*-вход любого из *RS*-триг-

геров, они устанавливаются в состояние «1», при этом на их прямых выходах присутствуют сигналы логической «1» (рис. 4.17, в—л). В состоянии «0» RS-триггеры устанавливаются подачей установочных импульсов на их R-входы.

С изменением кода управления (N_i) изменяется период поступления импульсов с выхода управляемого делителя частоты, что приводит к регулированию паузы после каждого двух разнополярных импульсов $T_{\Pi} = T_i N_i$, где T_i — период поступления импульсов с выхода генератора тактовых импульсов. Сформированные управляющие импульсы (рис. 4.17, в—л) поступают на входы первого усилителя мощности УМ1 непосредственно и на входы второго усилителя мощности УМ2 через коммутатор. На выходах усилителей формируется разнополярная система импульсов (рис. 4.17, м, н) с регулируемой паузой T_{Π} .

При исследовании устройства получены механические характеристики, показывающие, что в области малых сигналов управления наблюдается повышение чувствительности двигателя и хорошая линейность характеристик во всем диапазоне регулирования.

При всех методах цифрового управления двухфазный асинхронный двигатель как машина переменного тока работает от несинусоидальных по форме фазных токов и напряжений, что вызывает такие нежелательные эффекты, как увеличение энергетических потерь, уменьшение момента на валу, пульсации вращающегося момента и скорости. Эти явления обусловлены отрицательным влиянием различных гармоник питающего напряжения, отличных от основной.

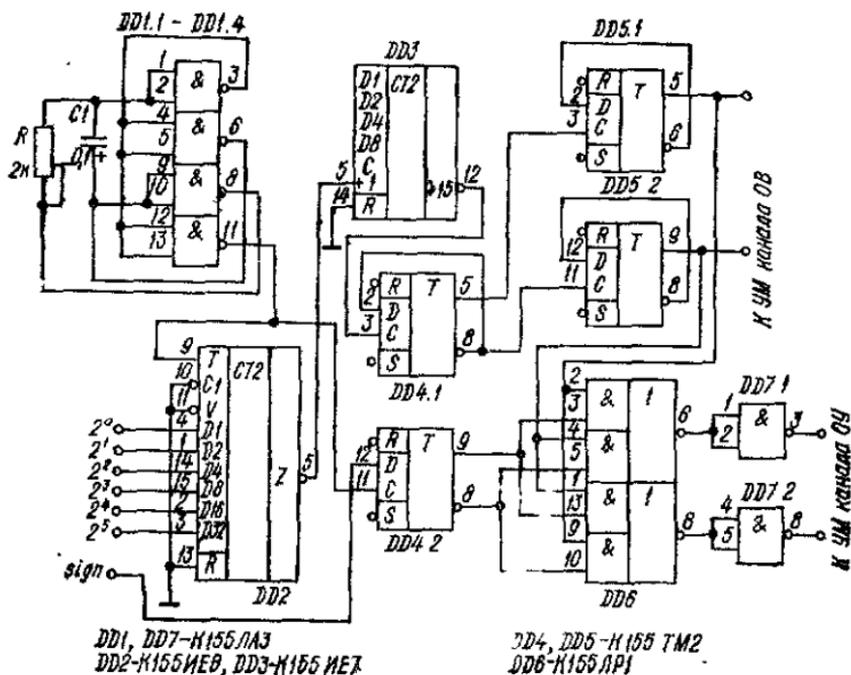


Рис. 4.18

Наиболее просты в технической реализации фазовый и частотно-импульсный методы цифрового управления. Кроме того, первый из них обладает повышенной чувствительностью в области малых сигналов управления, а также хорошей линейностью механических характеристик в диапазоне регулирования. Одним из недостатков является невысокий коэффициент использования двигателя по мощности и моменту, причина которого кроется в отрицательном влиянии гармоник, кратных трем. Наличие в напряжении питания обмоток статора гармоник, кратных трем, приводит к созданию ими тормозного момента и увеличению потребляемой мощности.

Частичное, а в ряде случаев (при максимальном сигнале управления) и полное устранение влияния гармоник, кратных трем, возможно при широтно-импульсном и частотно-широтно-импульсном методах цифрового управления, когда для питания двигателя используется неполное прямоугольное напряжение, имеющее паузу между импульсами, равную $1/3$, а также создается симметричный режим работы для электродвигателя (двухобмоточное управление).

Рассмотрим принципиальные схемы управляющей (слаботочной) части устройств цифрового (импульсного) управления двухфазными асинхронными двигателями

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства частотно-импульсного управления ДАД, выполненная на базе структурной схемы на рис. 4.8, изображена на рис. 4.18. На элементах DD1.1—DD1.4 (микросхема K155ЛАЗ) собран генератор тактовых импульсов. Управляемый делитель частоты реализован на элементах DD2 (микросхема K155ИЕ8) и DD3 (микросхема K155ИЕ7). Элемент DD3 имеет постоянный коэффициент деления и его необходимость обусловлена тем, что делитель на элементе DD2 при дробном коэффициенте деления имеет неравномерное по времени распределение импульсов. Первый, второй и третий Т-триггеры выполнены соответственно на элементах DD4.1, DD5.1, DD5.2 (микросхемы K155ТМ2). Функции коммутатора выполняют элементы DD4.2 (элемент памяти) и DD6 (микросхема K155ЛР1). Последний обеспечивает перекрестное подключение управляющих импульсов с прямых выходов второго и третьего Т-триггеров на свои инверсные выходы (выходы 6, 8). Элементы DD7.1, DD7.2 (микросхема K155ЛАЗ) выполняют функции элементов НЕ.

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства двухобмоточного широтно-импульсного управления ДАД, выполненная на базе структурной схемы на рис. 4.12, изображена на рис. 4.19. На элементах DD1.1—DD1.4 (микросхема K155ЛАЗ) собран генератор тактовых импульсов. Делитель частоты на восемь собран на элементе DD2 (микросхема K155ИЕ2). Управляемые делители частоты выполнены на элементах DD6 и DD7 (микросхемы K155ИЕ7). Т-триггеры собраны на элементах DD3.1, DD4 (микросхемы K155ТМ2). Первый и второй RS-триггеры блока широтной модуляции канала обмотки возбуждения выполнены на элементах DD5, а канала обмотки управления — на элементах DD8 (микросхемы K155ТМ2). На элементах DD10.1 и DD10.2 реализованы логические элементы И (микросхема K155ЛАЗ). Коммутатор выполнен на элементах DD3.2 (элемент памяти) и DD9 (микросхема K155ЛР1). Последний обеспечивает перекрестное подключение управляющих им-

пульсов. Элементы DD10.3 и DD10.4 (микросхемы К155ЛА3) выполняют функции логических элементов НЕ.

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства, обеспечивающего однообмоточное широтно-импульсное управление ДАД, показана на рис. 4.20. Эта схема выполнена на базе структурной схемы на рис. 4.10 и использует для питания обмоток статора прямоугольное напряжение, имеющее при максимальном сигнале управления (максимальной скорости)

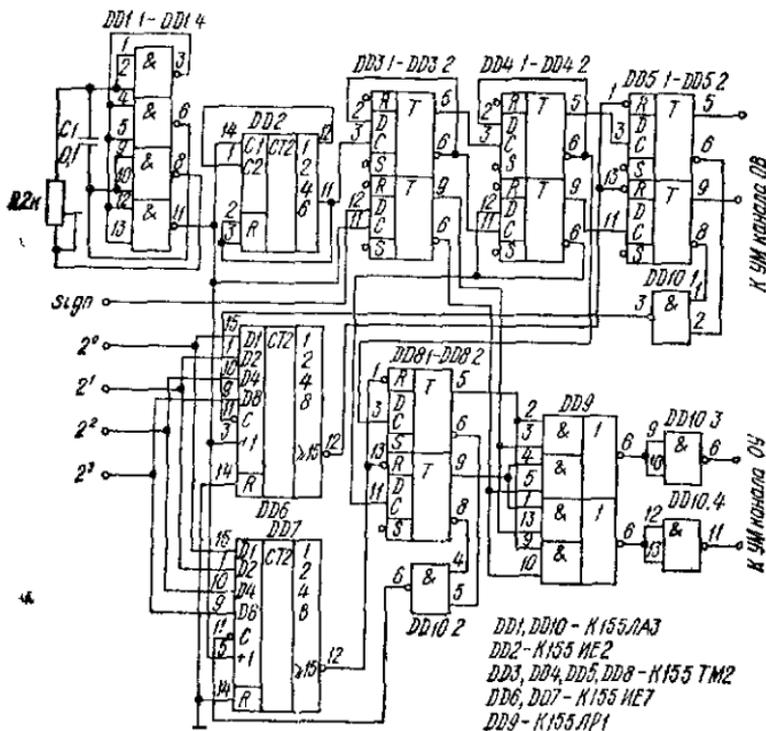
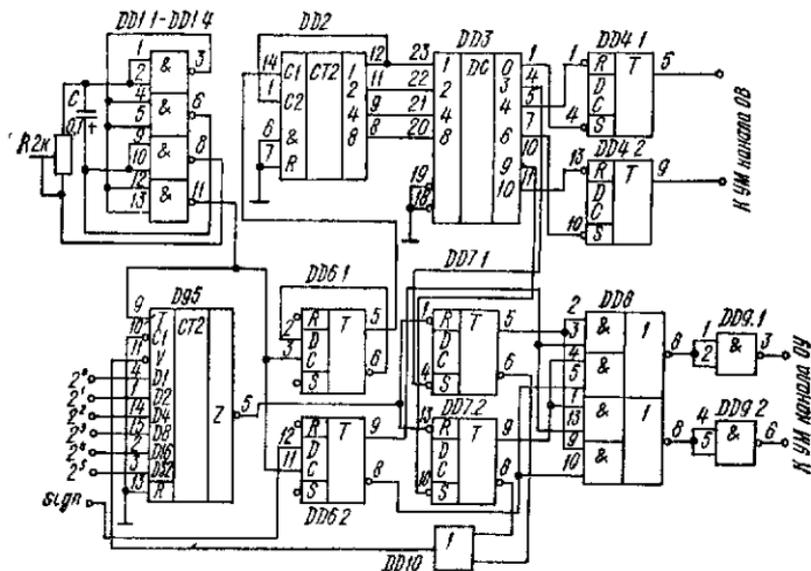


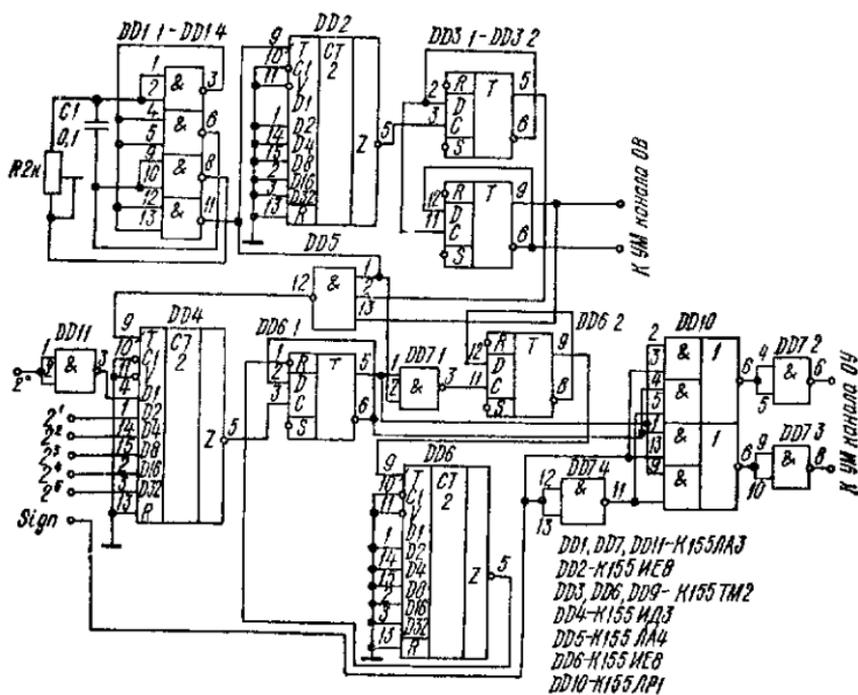
Рис. 4.19

паузу между импульсами, равную $\pi/3$. Генератор тактовых импульсов собран на элементах DD1.1—DD1.4 (микросхема К155ЛА3). Делитель частоты с коэффициентом деления, равным 2, собран на элементе DD6.1 (микросхема К155ТМ2) и работает в счетном режиме. Функции счетчика-делителя на 12 выполняет элемент DD2 (микросхема К155ИЕ4), выходы которого непосредственно подключены к входам дешифратора, собранного на элементе DD3 (микросхема К155ИД3). Первый, второй, третий и четвертый RS-триггеры выполнены соответственно на элементах DD4.1, DD4.2, DD7.1 и DD7.2 (микросхемы К155ТМ2). Управляемый делитель частоты реализован на элементе DD5 (микросхема К155ИЕ8). Функции коммутатора выполняют элементы DD6.2 (микросхема К155ТМ2), DD8 (микросхема К155ЛР1) и DD9 (микросхема К155ЛА3). На элементе DD6.2 реализовано запоминание знакового разряда (sign). Если знаковый разряд соответствует логической «1», то триггер DD6.2 устанавливается в единичное состояние и сигнал высокого уровня (логическая



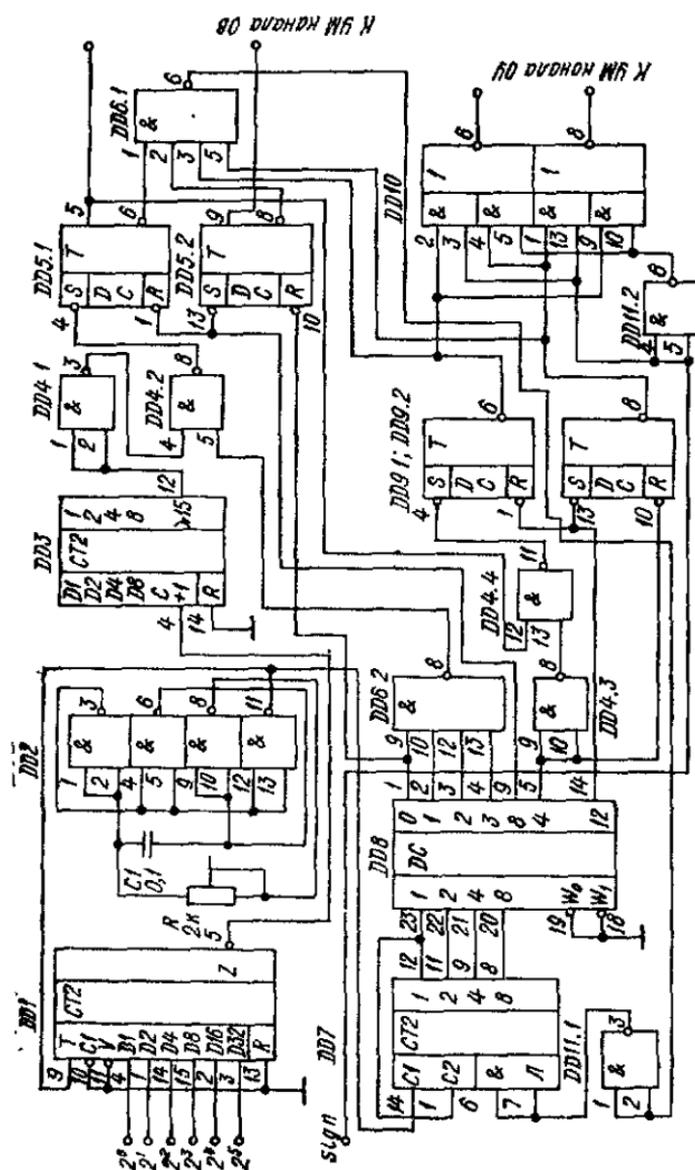
DD1, DD9-K155 AA3; DD2-K155 ME4; DD3-K155 DG3
 DD4, DD8, DD7-K155 TM2; DD5-K155 ME8; DD8 K155 AP1; DD10 K155 AP1

Рис. 4.20



DD1, DD7, DD11-K155 AA3
 DD2-K155 ME8
 DD3, DD6, DD9-K155 TM2
 DD4-K155 AA3
 DD5-K155 AA4
 DD6-K155 ME8
 DD10-K155 AP1

Рис. 4.21



DD1 - K155HE3; DD2, DD4, DD11 - K155ЛA3; DD3 - K155ME7; DD5, DD9 - K155TME2
 DD6 - K155ЛA3; DD7 - K155HE4; DD8 - K155M03; DD10 - K155ЛP1

Рис. 4.22

«1») с его прямого выхода (вывод 9) открывает по вторым входам логические элементы И микросхемы DD8 (выводы 3, 13), а сигнал низкого уровня (логический «0») с инверсного выхода (вывод 8) блокирует логические элементы И микросхем DD8 (выводы 5, 10). При этом очередность прохождения управляющих импульсов с прямых выходов элементов DD7.1 и DD7.2 (выводы 5, 9) на инверсные выходы DD8 (выводы 6, 8) такова, что ДАД

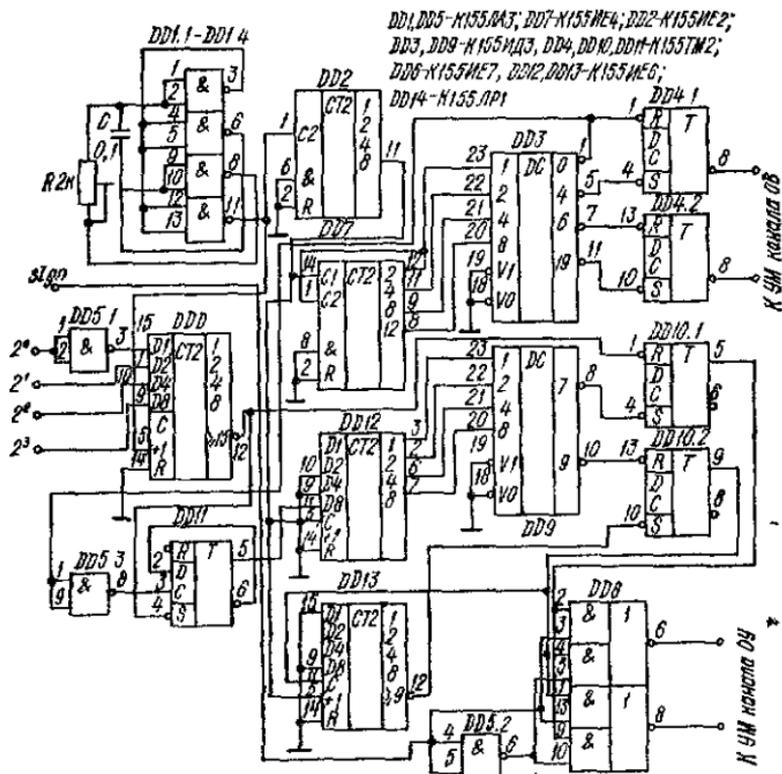


Рис. 4.23

вращается в одну сторону. Если знаковый разряд соответствует логическому «0», то триггер DD6.2 устанавливается в нулевое состояние и сигнал низкого уровня (логический «0») с его прямого выхода (вывод 9) закрывает по вторым входам логические элементы И микросхемы DD8 (выводы 3, 13), а сигнал высокого уровня (логическая «1») с инверсного выхода (вывод 8) открывает по вторым входам логические элементы И микросхемы DD8 (выводы 5, 10). При этом очередность прохождения управляющих импульсов с прямых выходов элементов DD7.1 и DD7.2 (выводы 5, 9) на инверсные выходы микросхемы DD8 (выводы 6, 8) изменится на противоположную. Таким образом, элемент DD8 под действием сигнала управления с выходов (прямого и инверсного) элемента DD6.2 обеспечивает перекрестное подключение управляющих импульсов с прямых выходов третьего (элемент DD7.1) и четвертого (элемент DD7.2) RS-триггеров. Выходные сигналы элемента DD8 инвертируются элементами DD9.1 и DD9.2 (микросхема K155Л3).

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства для фазового управления двухфазным асинхронным электродвигателем, выполненная на базе структурной схемы на рис. 4.4, а показана на рис. 4.21. На элементах DD1.1—DD1.4 (микросхема K155ЛА3) собран генератор тактовых импульсов. Элемент DD2 (микросхема K155ИЕ8) выполняет функции делителя частоты на 64. На элементах DD3.1—DD3.2 (микросхема K155ТМ2) реализованы первый и второй Т-триггеры. Управляе-

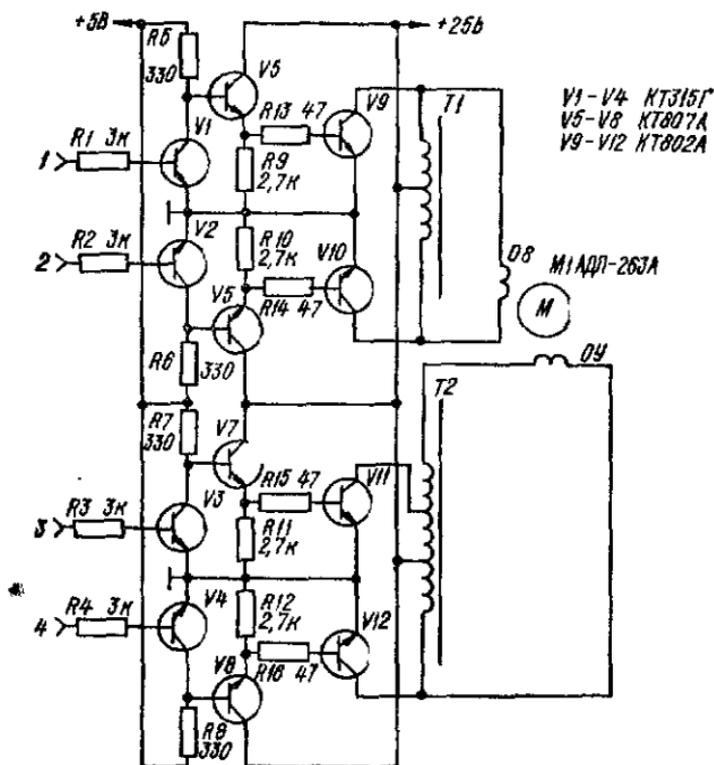


Рис. 4.24

мый делитель частоты выполнен на элементе DD4 (микросхема K155ИД3). Трехвходовый и двухвходовый логические элементы И—НЕ собраны соответственно на микросхемах K155ЛА4 (DD5) и K155ЛА3 (DD7.1). RS-триггер реализован на элементе DD6.1 (микросхема K155ТМ2). Счетчик-делитель на 128 состоит из двух последовательно включенных элементов: DD6.2 (делитель на 2) на микросхеме K155ТМ2 и DD8 (делитель на 64) на микросхеме K155ИЕ8. Коммутатор реализован на элементах DD7.2, DD7.3, DD7.4 (микросхемы K155ЛА3) и элементе DD10 (микросхема K155ЛР1). На вход устройства (рис. 4.21) подается двоичный код управления (при максимальной скорости электродвигателя во всех разрядах устанавливаются логические «1», при минимальной скорости двигателя — логические «0»).

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства для время-импульсного управления двухфазным

асинхронным электродвигателем, выполненная по структурной схеме на рис. 4.16, показана на рис. 4.22. На элементе DD1 (микросхема К155ИЕ8) собран управляемый делитель частоты. Элемент DD2 (микросхема К155ЛА3) выполняет функции генератора тактовых импульсов. На элементе DD3 (микросхема К155ИЕ7) выполнен делитель частоты. Элементы DD4.1 и DD4.2 (микросхема К155ЛА3) образуют первый элемент И. Первый, второй, третий и четвертый RS-триггеры реализованы соответственно на элементах DD5.1, DD5.2 и DD9.1, DD9.2 (микросхемы К155ТМ2). Счетчик и дешифратор выполнены на элементах DD7 и DD8 (соответственно микросхемы К155ИЕ4 и К155ИД3). Элементы DD6.1 и DD11.1 образуют второй логический элемент ИЛИ (микросхемы К155ЛА6 и К155ЛА3). Второй логический элемент И реализован на элементах DD4.3 и DD4.4 (микросхема К155ЛА3). Функции коммутатора выполняют элементы DD10 и DD11.2 (микросхемы К155ЛР1 и К155ЛА3). На элементе DD6.2 реализован первый логический элемент ИЛИ (микросхема К155ЛА6).

Принципиальная схема управляющей (слаботочной) части устройства для фазового управления двухфазным асинхронным двигателем, обеспечивающего устранение отрицательного влияния третьей и кратных ей гармоник на двигатель, показана на рис. 4.23. Управляющая часть выполнена по структурной схеме на рис. 4.4, б. Задающий генератор тактовых импульсов выполнен на логических элементах DD1.1—DD1.4 (микросхема К155ЛА3). На элементе DD2 (микросхема К155ИЕ2) реализован делитель частоты. Первый счетчик-делитель и первый дешифратор выполнены соответственно на элементах DD7 и DD3 (микросхемы К155ИЕ4 и К155ИД3). Управляемый делитель частоты реализован на элементе DD6 (микросхема К155ИЕ7). Второй счетчик-делитель и второй дешифратор выполнены соответственно на элементах DD12 и DD9 (микросхемы К155ИЕ6 и К155ИД3). Первый и второй RS-триггеры реализованы на элементах DD4.1 и DD4.2, третий и четвертый RS-триггеры — на элементах DD10.1 и DD10.2 (микросхемы К155ТМ2). Функции третьего счетчика-делителя выполняет элемент DD13 (микросхема К155ИЕ6). Коммутатор реализован на элементах DD8 и DD5.2 (микросхемы К155ЛР1 и К155ЛА3), а пятый RS-триггер на элементе DD11 (микросхема К155ТМ2). DD5.1 и DD5.3 — логические элементы (на микросхемах К155ЛА3).

Принципиальная схема силовой части схемы цифрового управления ДАД с усилителями мощности для питания обмоток двухфазного асинхронного двигателя типа АДП-263А, показана на рис. 4.24.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексенко А. Г., Коломбет Е. А., Стародуб Г. И. Применение прецизионных аналоговых микросхем.— М. : Радио и связь, 1985.— 304 с.

2. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы: Справ. пособие / С. В. Якубовский, Н. А. Барканов, Л. И. Ниссельсон и др.; Под ред. С. В. Якубовского.— М. : Радио и связь, 1984.— 432 с.

3. А.с. 788328 СССР, МКИ³ Н 02 Р 7/58. Устройство для управления двухфазным асинхронным двигателем.

4. А.с. 875336 СССР, МКИ³ G05 В 11/26. Устройство для цифрового управления асинхронным двигателем.

5. А.с. 1277348 СССР, МКИ⁴ Н 02 Р 7/42. Устройство для широтно-частотного управления асинхронным двухфазным электродвигателем.

6. А.с. 1283710 СССР, МКИ⁴ G05 В 11/26. Следящий привод.

7. А.с. 1325655 СССР, МКИ⁴ Н 02 Р 7/42. Устройство для широтно-частотного управления асинхронным двухфазным электродвигателем.

8. А.с. 1339857 СССР, МКИ⁴ Н 02 Р 7/58. Устройство для управления двухфазным асинхронным электродвигателем.

9. А.с. 1403325 СССР, МКИ⁴ Н 02 Р 7/42. Устройство для управления двухфазным электродвигателем.

10. А.с. 1416936 СССР, МКИ⁴ G05 В 15/02. Цифровая следящая система.

11. А.с. 1422356 СССР, МКИ⁴ Н 02 Р 7/58. Устройство для управления двухфазным асинхронным электродвигателем.

12. Бесекерский В. А. Динамический синтез систем автоматического регулирования.— М. : Наука, 1970.— 576 с.

13. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы.— М. : Наука, 1976.— 576 с.

14. Бесекерский В. А., Изранцев В. В. Системы автоматического управления с микро-ЭВМ.— М. : Наука, 1987.— 320 с.

15. Глазенко Т. А. Полупроводниковые системы импульсного асинхронного электропривода малой мощности.— Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1983.— 176 с.

16. Гостев В. И. Определение оптимальных управляющих воздействий на линейные объекты регулирования в системах управления с цифровыми регуляторами // Автоматика.— 1987.— № 3.— С. 56—61.

17. Гостев В. И. Построение цифровых регуляторов для систем с объектами регулирования 2-го и 3-го порядков при произвольных входных воздействиях // Автоматика.— 1986.— № 6.— С. 68—71.

18. Гостев В. И. Расчет переходных процессов систем с ключом и цифровым фильтром // Кибернетика и вычислительная техника.— 1984.— Вып. 64.— С. 3—9.

19. Гостев В. И. Таблица передаточных функций оптимальных цифровых регуляторов // Автоматика.— 1987.— № 2.— С. 52—55.

20. Гостев В. И. Таблица передаточных функций оптимальных цифровых регуляторов для линейно-изменяющихся входных воздействий // Автоматика.— 1987.— № 5.— С. 76—81.

21. Гостев В. И., Баранов А. А. Передаточная функция цифрового регулятора для оптимальной по быстродействию системы с объектом регулирования третьего порядка // Электромеханика.— 1987.— № 6.— С. 33—37.

22. Гостев В. И., Баранов А. А. Передаточные функции цифровых регуляторов для оптимальных по быстродействию систем с объектами регулирования второго порядка // Автоматика.— 1986.— № 4.— С. 60—62.

23. Гостев В. И., Гусовский С. В. Расчет и оптимизация систем с конечным временем съема данных.— К. : Техніка, 1985.— 152 с.

24. Гостев В. И., Дрезналь А. Г. Адаптивные системы управления с объектом регулирования второго порядка и дискретным регулятором // Автоматика.— 1988.— № 3.— С. 67—71.

25. Гостев В. И., Поречный В. Н. Построение дискретных регуляторов с переменным шагом квантования для систем управления, работающих при произвольных входных воздействиях // Автоматика.— 1988.— № 1.— С. 65—68.

26. Гостев В. И., Сватов В. Ф. Расчет передаточной функции оптимального цифрового регулятора для систем с объектом регулирования второго порядка при линейно-изменяющемся входном воздействии // Электромеханика.— 1987.— № 7.— С. 78—82.

27. Гостев В. И., Синецкий И. В. Оптимальный при ступенчатых воздействиях регулятор для систем управления второго порядка с двумя нелинейностями // Автоматика.— 1988.— № 5.— С. 74—79.

28. Гостев В. И., Поречный В. Н., Синецкий И. В. Оптимальное по быстродействию управление в дискретных системах с насыщением // Автоматика.— 1988.— № 2.— С. 56—61.

29. Гурий Л. С., Дымарский Я. С., Меркулов А. Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов.— М.: Сов. радио, 1968.— 464 с.

30. Зельдин Е. А. Цифровые интегральные микросхемы в информационно-измерительной аппаратуре.— Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986.— 280 с.

31. Изерман Р. Цифровые системы управления.— М. : Мир, 1984.— 541 с.

32. Коссов О. А. Усилители мощности на транзисторах в режиме переключений.— М. : Энергия, 1971.— 432 с.

33. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления.— М. : Машиностроение, 1986.— 448 с.

34. Справочник по микропроцессорным устройствам / А. А. Молчанов, В. И. Корнейчук, В. П. Тарасенко, Д. А. Россинский.— К. : Техніка, 1987.— 288 с.

35. Справочник по устройствам цифровой обработки информации / Н. А. Виноградов, В. Н. Яковлев, В. В. Воскресенский и др.— К. : Техніка, 1988.— 415 с.

36. Тетельбаум И. М., Шнейдер Ю. Р. Практика аналогового моделирования динамических систем : Справ. пособие.— М.: Энергоатомиздат, 1987.— 384 с.

37. Ту Ю. Современная теория управления.— М. : Машиностроение, 1971.— 472 с.

38. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления.— М. : Машиностроение, 1964.— 703 с.

39. Цифровые системы управления электроприводами / А. А. Батоврин, П. Г. Дашевский, В. Д. Лебедев и др.— Л. : Энергия Ленингр. отд-ние, 1977.— 256 с.

40. Цифровые электромеханические системы / В. Г. Каган, Ю. Д. Бери, Б. И. Акимов, А. А. Хрычев.— М. : Энергоатомиздат, 1985.— 208 с.

41. Цифровые электроприводы с транзисторными преобразователями / С. Г. Герман-Галкин, В. Д. Лебедев, Б. А. Марков, Н. И. Чичерин.— Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986.— 248 с.

42. Шамриков Б. М. Основы теории цифровых систем управления.— М. : Машиностроение, 1985.— 296 с.

43. Щербаков В. И., Грездов Г. И. Электронные схемы на операционных усилителях : Справ.— К. : Техніка, 1983.— 213 с.

44. Шерстнева Л. А., Никитин В. Г. Микропроцессоры и микро-ЭВМ.— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985.— 120 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава 1. Передаточные функции цифровых регуляторов для оптимальных по быстродействию систем с линейными объектами регулирования	5
1.1. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем с объектами регулирования второго порядка при ступенчатом входном воздействии	5
1.2. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем с объектами регулирования третьего порядка при ступенчатом входном воздействии	15
1.3. Определение оптимальных управляющих воздействий на линейные объекты регулирования	34
1.4. Определение передаточных функций оптимальных цифровых регуляторов для систем с объектами регулирования высокого порядка при ступенчатом входном воздействии	56
1.5. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов при линейно изменяющемся входном воздействии	70
1.6. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов при линейно-квадратичном входном воздействии	85
1.7. Передаточные функции оптимальных цифровых регуляторов для систем с объектами регулирования, имеющими форсирующие звенья	101
1.8. Определение оптимальных управляющих воздействий, формируемых цифровыми регуляторами с неравномерным шагом ивантования	107
1.9. Учет ненулевых начальных условий по скорости	116
Глава 2. Анализ и синтез систем управления с цифровыми регуляторами при произвольных входных воздействиях	122
2.1. Структурные схемы и анализ точности систем управления при произвольных входных воздействиях	122
2.2. Идентификация параметров объектов регулирования и настройка цифровых регуляторов	136
2.3. Учет насыщения в системах управления с цифровыми регуляторами	149
2.4. Анализ систем управления с цифровыми регуляторами в частотной области	180
2.5. Структурное моделирование систем управления на микро-ЭВМ	198
Глава 3. Цифровые регуляторы для систем управления при произвольных входных воздействиях	203

3 1. Особенности реализации оптимальных цифровых регуляторов	203
3 2. Регуляторы, оптимальные при ступенчатых входных воздействиях	206
3 3. Регуляторы, оптимальные при линейно изменяющихся воздействиях	222
3.4. Регуляторы с переменным шагом квантования	235
3.5. Построение цифровых регуляторов на микропроцессорах	239
Глава 4. Устройства прямого цифрового управления двухфазными асинхронными двигателями	244
4.1. Особенности цифрового управления двухфазным асинхронным двигателем	244
4.2. Методы и устройства цифрового управления двухфазным асинхронным двигателем	247
Список литературы	276

Справочное издание

Гостев Владимир Иванович

Системы управления с цифровыми регуляторами

Справочник

Редактор *Н. М. Корнильева*
 Оформление художника *Л. А. Дильарева*
 Художественный редактор *В. С. Шапошников*
 Технический редактор *Н. А. Бондарчук*
 Корректор *В. Н. Руденко*

ИБ № 4116

Сдано в набор 15.05.89. Подписано в печать 14.02.90. БФ 01537. Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,7. Усл. кр. отт. 14,91. Уч. изд. л. 16,18. Тираж 15 000 экз. Зак. 9-224. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Техника» 252601 Киев 1 ул. Крещатик 6.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057,
 Харьков 57, ул. Донец-Захаржевского, 6/8